

第 1 回
Online Math Contest
Proxima Technology 杯

予選

2024 年 9 月 21 日 10:00–18:00

I 注意事項

- 1 提出ボタンより提出が行われないと採点されません。また、制限時間の終了とともに提出は締め切られます。(終了時に入力してある部分についても提出されないと採点されませんので、必ず制限時間内に提出ボタンを押すようにしてください。)
- 2 再提出は何度でも可能です。再提出が行われた際は、一番最後に提出されたものが採点されます。
- 3 問題番号、ページ及び採点方法については、下表のとおりです。

問題	ページ	採点方法
第1問	7~8	左の8問のすべてが採点されますが、そのうち点数が高い5問の合計を点数とします。 例 各大問の得点が、30, 50, 45, 0, 20, 30, 30, 35であった場合、点数は $50 + 45 + 35 + 30 + 30 = 190$ となります。
第2問	9~9	
第3問	10~18	
第4問	19~27	
第5問	28~36	
第6問	37~41	
第7問	42~48	
第8問	49~56	

- 4 表記に関する注意は4ページに、人名のカタカナ表記は5ページに記載してあります。
- 5 不正行為について
 - ① 不正行為に対しては厳正に対処します。
 - ② 複数人で問題を解くことを禁止します。誰かと相談する、SNS等で質問するなどすべて不正行為とみなされます。
 - ③ 試験終了までは問題、自身の解答、その他問題の内容に関することを他人に見せること(SNSに載せることも含む)を禁止します。また問題のPDFの取り扱いについては公式HPを確認してください。
 - ④ 問題の解答作成に生成AI等のプログラムを活用することを禁止します。
 - ⑤ 不正行為を行った場合は、公式HPに記載されている措置をとる場合があります。
- 6 その他の本コンテストに関する注意事項については公式HPより確認してください。

II 解答上の注意

解答上の注意は、次ページに記載してあります。必ず読みなさい。

II 解答上の注意

- 1 解答は、予選用ウェブページの問題番号に対応した解答欄にチェックを入れなさい。
- 2 問題の文中の **ア** , **イウ** などには、数字 (0~9) が入ります。ア、イ、ウ、... の一つ一つは、数字のいずれか一つに対応します。
それらを予選用ウェブページの ア、イ、ウ、... で示された解答欄にチェックを入れて答えなさい。

例 **アイウ** に 496 と答えたいとき

ア	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
イ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ウ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

- 3 分数形で解答する場合、それ以上約分できない形で答えなさい。
例えば、 $\frac{3}{4}$ と答えるところを、 $\frac{6}{8}$ のように答えてはいけません。
- 4 根号を含む形で解答する場合、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。
例えば、 $4\sqrt{2}$ 、 $\frac{\sqrt{13}}{2}$ と答えるところを、 $2\sqrt{8}$ 、 $\frac{\sqrt{52}}{4}$ のように答えてはいけません。
- 5 問題の文中の二重四角で表記された **エ** などには、選択肢から一つを選んで答えなさい。
- 6 同一の問題文中に **オカ** , **キ** などが2度以上現れる場合、原則として、2度目以降は、**オカ** , **キ** のように細字で表記します。
- 7 **ク** a のクに0や1が入る場合は、 $0a$ は0を、 $1a$ は a を表します。
同様に、**ケ** b のケの選択肢の指す項に0や1が入る場合は、 $0b$ は0を、 $1b$ は b を表します。
- 8 0以上の実数 x に対して、**コ** のコに0や1が入る場合は、それぞれ x^0 は1を、 x^1 は x を表します。
同様に、0以上の実数 y に対して、**サ** のサの選択肢の指す項に0や1が入る場合は、それぞれ y^0 は1を、 y^1 は y を表します。

III 表記に関する注意

- 数の表し方.

- 自然数は 1 以上の整数の意味で用い, 自然数全体を \mathbb{N} と表す.
つまり, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ である.
- 整数全体を \mathbb{Z} と表す.
- 有理数全体を \mathbb{Q} と表す.
- 実数全体を \mathbb{R} と表す.
- 複素数全体を \mathbb{C} と表す.
- 混同のおそれが無いときは, π は円周率を表し, e はネイピア数を表す.
- 虚数単位を $\sqrt{-1}$ と表す. ただし, 一部の問題は, 虚数単位を i と表す. (問題文の冒頭にその記述がなされている.)
- 2 以上の自然数 n に対して, n 進法での数を $312_{(n)}$ のように表す.

- 行列の表し方.

- $m \times n$ 行列 A の (i, j) 成分が a_{ij} であるとき,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

や

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

と表す.

- 体 K 上の $m \times n$ 行列全体集合を $M_{m,n}(K)$ と表す. 特に $m = n$ のとき, $M_n(K)$ と表す.
- 断りのない限り, I は単位行列を表す.
- 対角行列

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

を $\text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ と表す.

- 行列 A に対して, tA で A の転置行列を表す.
- 複素行列 A に対して, A^* で A の随伴行列を表す.
- 複素正方行列 A がエルミート行列であるとは, $A = A^*$ を満たすことである.
- 正方行列 A のトレースを $\text{Tr}(A)$ と表し, 行列式を $\det(A)$ と表す.

IV 人名のカタカナ表記一覧

ここでは問題文に出てくる人物名の標準的なカタカナ表記を登場順に一覧にして載せてあります。複数のカタカナ表記が存在する人物については、読み方を複数表示してあります。(ただし、載せているもの以外の表記があったり、長音符の有無など、ここに書かれているものがすべてとは限りません。)

- 人物名: カタカナ表記 1(/カタカナ表記 2)
- 例 Pythagoras: ピタゴラス/ピュタゴラス

第 1 問

- Sylow: シロー

第 3 問

- Mercator: メルカトル
- Riemann: リーマン
- Levi-Civita: レビ・チビタ/レヴィ・チヴィタ

第 4 問

- Hopf: ホップ
- Euclid: ユークリッド/エウクレイデス
- Lie: リー
- Riemann: リーマン
- Hermite: エルミート
- Fubini: フビニ
- Study: ストゥディオ/スタディオ
- Levi-Civita: レビ・チビタ/レヴィ・チヴィタ
- Stokes: ストークス
- Chern: チャーン
- de Rham: ド・ラーム/ドラーム

第 5 問

- Hadamard: アダマール

第 6 問

- Lebesgue: ルベーク
- Hilbert: ヒルベルト
- Dirac: ディラック
- Radon: ラドン
- Nikodym: ニコディム

第 7 問

- Dirac: ディラック
- Atiyah: アティヤ
- Singer: シンガー
- Chern: チャーン
- Lie: リー
- Riemann: リーマン

第 8 問

- Lyapunov: リアプノフ/リャプノフ
- Frobenius: フロベニウス
- Lagrange: ラグランジュ

第1回
Online Math Contest
Proxima Technology 杯

予選

問題	採点方法
第1問	<p>左の8問のすべてが採点されますが、そのうち点数が高い5問の合計を点数とします。</p> <p>例 各大問の得点が, 30, 50, 45, 0, 20, 30, 30, 35 であった場合, 点数は</p> $50 + 45 + 35 + 30 + 30 = 190$ <p>となります。</p>
第2問	
第3問	
第4問	
第5問	
第6問	
第7問	
第8問	

第1問 (配点 50)

G を有限群, p を素数とする. G の位数が p 冪であるとき G は p 群であるという. また, G の p 部分群 H (すなわち G の部分群でありかつ p 群であるもの) であって指数が p で割れないものを, G の p -Sylow 部分群という. 任意の有限群 G と素数 p に対して次の二つの性質が成り立つ.

性質

- (S-1) G は (一意的とは限らない) p -Sylow 部分群を持つ.
- (S-2) G の部分群 H と p -Sylow 部分群 G' に対して, ある $g \in G$ が存在して $g^{-1}G'g \cap H$ は H の p -Sylow 部分群になる.

性質 (S-2) より有限群の二つの p -Sylow 部分群は共役であり, 特に同型である.

以下でさまざまな有限群の p -Sylow 部分群の具体例を挙げる.

- 巡回群 $\mathbb{Z}/8000\mathbb{Z}$ の 2-Sylow 部分群は $\mathbb{Z}/\boxed{\text{アイ}}\mathbb{Z}$ と同型である.
- 単位的可換環 $\mathbb{Z}/16000\mathbb{Z}$ の可逆元のなす乗法群 $(\mathbb{Z}/16000\mathbb{Z})^*$ の 2-Sylow 部分群は $\mathbb{Z}/\boxed{\text{ウ}}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\boxed{\text{エ}}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\boxed{\text{オカ}}\mathbb{Z}$ と同型である. (ここで, $\boxed{\text{ウ}} \leq \boxed{\text{エ}} \leq \boxed{\text{オカ}}$ である.)
- 4 次対称群 \mathfrak{S}_4 の 2-Sylow 部分群は 4 次二面体群 D_4 と同型である. 実際, 正方形を考え, 各頂点の番号をある頂点から左回りに $1, \dots, 4$ のようにつける. D_4 は正方形に作用し頂点の番号の置換を引き起こすため, 埋め込み $\iota: D_4 \hookrightarrow \mathfrak{S}_4$ が存在する. \mathfrak{S}_4, D_4 の位数を比較すれば D_4 が \mathfrak{S}_4 の 2-Sylow 部分群である.
- $N (\geq 1)$ を自然数とし, N 次一般線形群 $\text{GL}_N(\mathbb{F}_p)$ を考える. $\text{GL}_N(\mathbb{F}_p)$ の極大冪単部分群

$$U(N, \mathbb{F}_p) := \left\{ (a_{ij}) \in \text{GL}_N(\mathbb{F}_p) \mid \begin{array}{l} a_{ii} = 1 \quad (1 \leq i \leq N) \\ a_{ij} = 0 \quad (1 \leq j < i \leq N) \end{array} \right\}$$

$$\left(= \left\{ A \in \text{GL}_N(\mathbb{F}_p) \mid \begin{array}{l} A \text{ は上三角行列であり,} \\ A \text{ の対角成分は全て } 1 \end{array} \right\} \right)$$

は $\text{GL}_N(\mathbb{F}_p)$ の p -Sylow 部分群である. このことを $N = 4, p = 3$ の場合に確認する. $\text{GL}_4(\mathbb{F}_3)$ の位数は $2^{\boxed{\text{キ}}} \times 3^{\boxed{\text{ク}}} \times \boxed{\text{ケコ}}$ である. (ここで $\boxed{\text{ケコ}}$ は 6 と互いに素な自然数である.) $U(4, \mathbb{F}_3)$ の位数は $3^{\boxed{\text{ク}}}$ であり, 確かに 3-Sylow 部分群である. また, $\text{GL}_4(\mathbb{F}_3)$ の 3-Sylow 部分群の個数は $\boxed{\text{サシスセ}}$ である.

(Online Math Contest—Proxima Technology 杯第1問は次ページに続く.)

性質 (S-1), (S-2) の証明の概略を述べる. (この段落の内容は理解せずとも次の段落以下の問題を解くことができる.) G, H, G' を性質 (S-2) 中のものとし, $c \in G$ の G/G' における剰余類を $[c]$ と書くことにする. 商集合 G/G' の元の個数は p と互いに素であるため, ある $g \in G$ に対して $H[g^{-1}] (\subset G/G')$ の元の個数は p と互いに素である. この g を用いると性質 (S-2) が示せる. 性質 (S-2) から, p -Sylow 部分群を持つ有限群の任意の部分群がまた p -Sylow 部分群を持つと分かる. よって性質 (S-1) を示すために, 勝手な有限群 G に対して「 G は, p -Sylow 部分群を持つある有限群に埋め込める」ことを示せば十分である. $\mathbb{F}_p[G]$ を群 G の \mathbb{F}_p 上の群環とし, G の $\mathbb{F}_p[G]$ への自然な左作用 $G \curvearrowright \mathbb{F}_p[G]$ を考える. G の位数を n とすると $\mathbb{F}_p[G]$ の \mathbb{F}_p 線形自己同型群は $GL_n(\mathbb{F}_p)$ と同型であるため, G は $GL_n(\mathbb{F}_p)$ に埋め込める. いま, 前頁の四つ目の例から $GL_n(\mathbb{F}_p)$ は p -Sylow 部分群を持つと分かる. 以上より (S-1) が従う.

性質 (S-2) について次の**事実**が成り立つことに注意する.

事実

有限群 G の p -Sylow 部分群 G' と部分群 H に対し, $G' \cap H$ は H の p -Sylow 部分群になるとは限らない.

この**事実**の具体例として, 4次元 \mathbb{F}_2 線形空間 \mathbb{F}_2^4 の標準基底 e_1, \dots, e_4 の置換が誘導する, 4次対称群 \mathfrak{S}_4 の埋め込み $\mathfrak{S}_4 \subset GL_4(\mathbb{F}_2)$ を観察する.

まずは D_4 を前頁で挙げた具体例と同様に, ι により \mathfrak{S}_4 の (2-Sylow) 部分群とみなす. $GL_4(\mathbb{F}_2)$ の 2-Sylow 部分群であって, \mathfrak{S}_4 への制限が D_4 と一致するものを調べたい. 性質 (S-2) より $GL_4(\mathbb{F}_2)$ の 2-Sylow 部分群はある $P \in GL_4(\mathbb{F}_2)$ を用いて $PU(4, \mathbb{F}_2)P^{-1}$ と表せる. そこで

$$D_4 \subset PU(4, \mathbb{F}_2)P^{-1} \tag{①}$$

を満たす

$$P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{pmatrix}$$

を求めたい. $v = {}^t(a \ b \ c \ d) \in \mathbb{F}_2^4$ に対して, a, b, c, d を並べて 2進法で $abcd_{(2)}$ と表される数を (2桁の)10進法で $\varphi(v)$ と書くことにする. (例: $\varphi(e_1) = 08$, $\varphi(e_4) = 01$, $\varphi(e_1 + e_2) = 12$ である.) このとき, ①を満たす全ての P に対して $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_4)$ をこの順に並べて得られる 8桁の 10進法で表される数を考えた際, とりうる値の最小値は ソタチツテトナニ である.

また, $GL_4(\mathbb{F}_2)$ の 2-Sylow 部分群で \mathfrak{S}_4 への制限が 2-Sylow 部分群にならないものは 又ネノ 個である.

第2問 (配点 50)

R を代数体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-23})$ の部分環 $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-23}}{2}]$ とする. 多項式環 $\mathbb{Z}[T]$ から R への環準同型写像

$$\alpha: \mathbb{Z}[T] \rightarrow R; \quad T \mapsto \frac{1+\sqrt{-23}}{2}$$

の核を I とおく. I は $\mathbb{Z}[T]$ の単項イデアルであり, その生成元で最高次係数が正のものを $f(T)$ とおく.

(1) $f(T) = \boxed{\text{ア}} T^2 - \boxed{\text{イ}} T + \boxed{\text{ウ}}$ である.

(2) α による $\frac{13+3\sqrt{-23}}{2}$ の逆像に含まれる多項式で次数が最小のものは $\boxed{\text{エ}} T + \boxed{\text{オ}}$ である. ここで射影 $\pi: \mathbb{Z}[T] \rightarrow \mathbb{Z}[T]/(\boxed{\text{エ}} T + \boxed{\text{オ}})$ を考える. (π の核は 0 以外の整数を含まないことに注意せよ.) π による I の像に含まれる最小の正の整数は $\boxed{\text{カキ}}$ である. これは $R/(\frac{13+3\sqrt{-23}}{2})$ の加法群としての位数でもある. さらに, α による $\frac{1-\sqrt{-23}}{2}$ の逆像に含まれる 1 次多項式を $\text{Conj}(T)$ とおくと

$$\begin{aligned} \boxed{\text{カキ}} &\equiv \boxed{\text{ク}}^2 f\left(-\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{ク}}}\right) \\ &\equiv (\boxed{\text{エ}} T + \boxed{\text{オ}}) (\boxed{\text{コ}} \text{Conj}(T) + \boxed{\text{サ}}) \pmod{I} \end{aligned}$$

と分解できる.

(3) $R/(1 + 2\sqrt{-23})$ の位数は $\boxed{\text{シス}}$ であり, $\boxed{\text{シス}}$ の素因数で最小のものは $\boxed{\text{セ}}$ である. R のイデアルは素イデアルの積に (順序を除いて) 一意的に分解されるから, $R/(\boxed{\text{セ}}, 1 + 2\sqrt{-23})$ の位数は $\boxed{\text{ソ}}$ である. したがって, $R/(23 + \sqrt{-23}, 3\sqrt{-23})$ の位数は $\boxed{\text{タチ}}$ である. なお, $R/(\boxed{\text{セ}})$ の位数は $\boxed{\text{ツ}}$ である.

(4) イデアル $2R$ は素イデアル $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ によって $2R = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2$ と分解される. ここで $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ は非負整数 n, m_1, l_1, m_2, l_2 を用いて

$$\mathfrak{p}_1 = \left(n, m_1 + l_1 \cdot \frac{1 + \sqrt{-23}}{2} \right), \quad \mathfrak{p}_2 = \left(n, m_2 + l_2 \cdot \frac{1 + \sqrt{-23}}{2} \right)$$

と表せる. $m_1 = 1$ のとき, n, l_1, m_2, l_2 がとりうる最小値はそれぞれ $\boxed{\text{テ}}, \boxed{\text{ト}}, \boxed{\text{ナ}}, \boxed{\text{ニ}}$ であり, $\frac{1+3\sqrt{-23}}{2} \in \mathfrak{p}_1^{k_1} \mathfrak{p}_2^{k_2}$ を満たす非負整数 k_1, k_2 の最大値はそれぞれ $\boxed{\text{ヌ}}, \boxed{\text{ネ}}$ である. なお, $R/(2024, \frac{1+3\sqrt{-23}}{2})$ の位数は $\boxed{\text{ノ}}$ である.

第3問 (配点 50)

太郎さんと花子さんは曲面論の講義の受講生である。講義で学んだことを受けて、太郎さんと花子さんは身近な曲面とその座標系として、地球と世界地図に興味を持った。そして太郎さんと花子さんは講義室に貼られている世界地図を曲面論的に考察している。



著作権保護のため画像を差し替えております。

(Online Math Contest—Proxima Technology 杯第3問は次ページに続く.)

(1) 太郎さんと花子さんはこの世界地図の図法について話している。

太郎: この図法は Mercator 図法といって, 緯線同士, 経線同士が平行になるように考えられたものなんだ.

花子: 地球を 2 次元球面とみたとき, Mercator 図法はどのような座標を取ることにあたるのかな?

$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ を 2 次元単位球面とし,

$$S_0^2 := S^2 \setminus \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\}$$

について考える.

Mercator 図法の座標を求める準備として, S_0^2 の座標 (ϕ, θ) を, 東経が正, 西経が負としたときに, ϕ が経度, そして θ が緯度を表すように,

$$(x_1, x_2, x_3) = (\cos \phi \cos \theta, \sin \phi \cos \theta, \sin \theta), \quad \phi \in (-\pi, \pi], \quad \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

によって定める.

\mathbb{R}^3 の標準的な Riemann 計量は

$$g_{\mathbb{R}^3} = dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2 + dx_3 \otimes dx_3$$

と表される. S_0^2 の Riemann 計量 $g_{S_0^2}$ を $S_0^2 \subset \mathbb{R}^3$ による $g_{\mathbb{R}^3}$ の制限計量として定める. このとき, $g_{S_0^2}$ を座標 (ϕ, θ) によって表示すると

$$g_{S_0^2} = \boxed{\text{ア}}^2 d\phi \otimes d\phi + \boxed{\text{イ}}^2 d\theta \otimes d\theta$$

となる.

,

 の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

①	$\sin \phi$	②	$\cos \phi$	③	$\tan \phi$	④	$\sin \theta$
⑤	$\cos \theta$	⑥	$\tan \theta$	⑦	0	⑧	1

(Online Math Contest—Proxima Technology 杯第 3 問は次ページに続く.)

この計量 $g_{S_0^2}$ に関して座標が等角となるように、変数変換として、 $d\theta = \left(\frac{\text{ア}}{\text{イ}} \right) d\psi$ となる ψ を求め、 (ϕ, θ) 座標を (ϕ, ψ) 座標に取り替える。 $\psi = \psi(\theta)$ と表せるとすると、

$$d\psi = \frac{d\psi}{d\theta} d\theta$$

であるから、

$$\frac{d\psi}{d\theta} = \frac{\text{イ}}{\text{ア}}$$

とわかる。したがって、 ψ は不定積分 $\int \left(\frac{\text{イ}}{\text{ア}} \right) d\theta$ によって求められる。積分定数は 0 として計算すると、

$$\psi = \frac{1}{2} \text{ウ} \left(\frac{1 + \text{エ}(\theta)}{1 - \text{オ}(\theta)} \right)$$

と表せる。

~ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

① sin	① cos	② tan	③ sinh
④ cosh	⑤ tanh	⑥ exp	⑦ log

(Online Math Contest—Proxima Technology 杯第 3 問は次ページに続く.)

以下,

$$\psi = \frac{1}{2} \boxed{\text{ウ}} \left(\frac{1 + \boxed{\text{エ}}(\theta)}{1 - \boxed{\text{オ}}(\theta)} \right)$$

とし, ここからは (ϕ, ψ) 座標によって議論する. 点 $(x_1, x_2, x_3) \in S_0^2$ と Riemann 計量 $g_{S_0^2}$ はそれぞれ ϕ, ψ を用いて表すと,

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\cos \phi \boxed{\text{カ}}, \sin \phi \boxed{\text{キ}}, \boxed{\text{ク}} \right),$$

$$g_{S_0^2} = \boxed{\text{ケ}}^2 (d\phi \otimes d\phi + d\psi \otimes d\psi)$$

と表される. この座標 (系) を **Mercator 図法** と呼ぶ.

$\boxed{\text{カ}} \sim \boxed{\text{ケ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

① $\sinh \psi$	② $\cosh \psi$	③ $\tanh \psi$	④ $\frac{1}{\sinh \psi}$	⑤ $\frac{1}{\cosh \psi}$
⑥ $\frac{1}{\tanh \psi}$	⑦ $\sinh \phi$	⑧ $\cosh \phi$	⑨ 0	⑩ 1

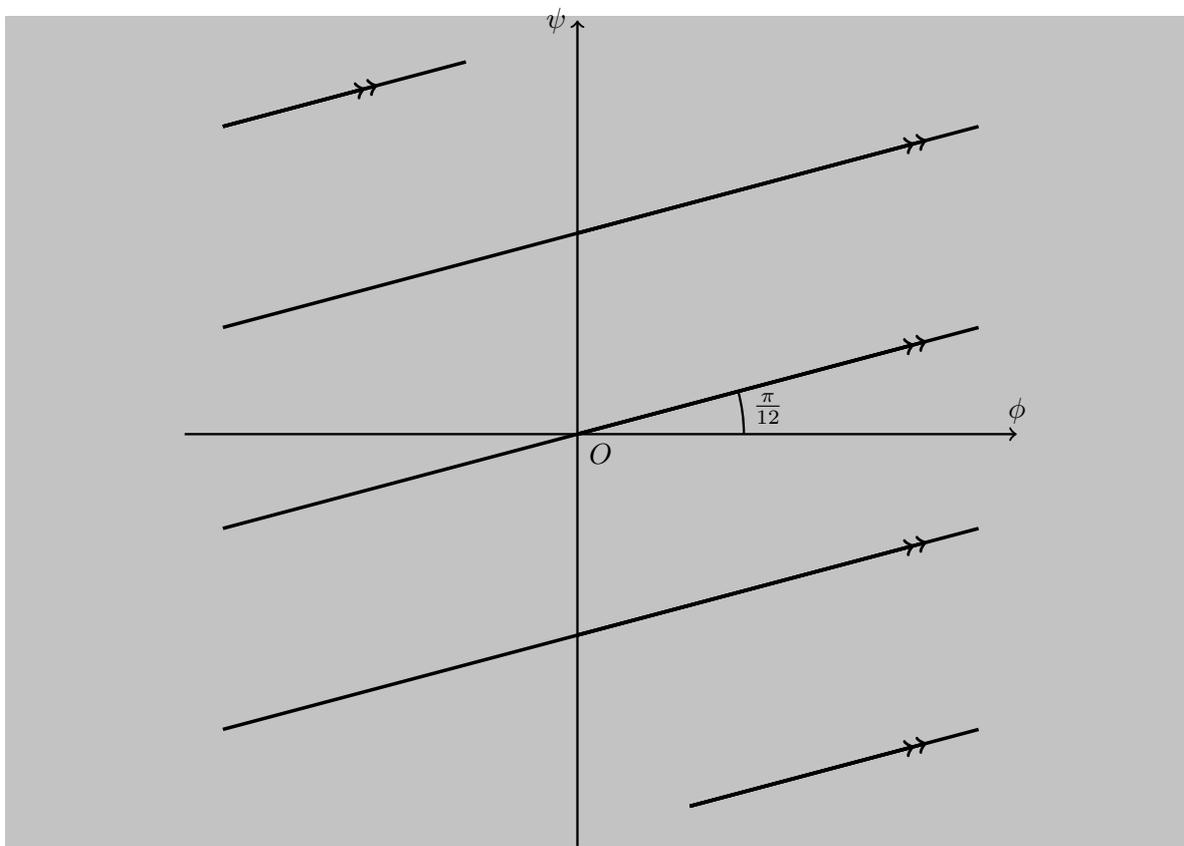
(Online Math Contest—Proxima Technology 杯第 3 問は次ページに続く.)

(2) 太郎さんと花子さんは Mercator 図法の地図上に引いた直線について話している.

花子: Mercator 図法の地図上の 2 点をとったとき, この 2 点を線分で結んでも地球の上で最短の航路にはならないと聞いて, 驚いたことを覚えているよ.

太郎: Mercator 図法の地図の上の直線について考えてみよう.

Mercator 図法の地図において, 経度が等しい右端の点と左端の点を同一視したとき, 連続につながる傾き $\tan(\pi/12)$ の線分族で, そのうち一本は原点を通るものを考える. これを図示すると下の図のようになる.



著作権保護のため画像を差し替えております.

(Online Math Contest—Proxima Technology 杯第 3 問は次ページに続く.)

$c = \tan(\pi/12)$ と置き、この線分族の、 t をパラメータとする媒介変数表示を、

$$(\phi, \psi) = \left(\frac{1}{c}t - 2n\pi, t \right) \quad (c(2n-1)\pi \leq t \leq c(2n+1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z})$$

によって与える。すると、 (ϕ, ψ) 平面上において、このパラメータ付けられた線分族を、 S^2 の $(0, 0, 1)$ を起点とする立体射影

$$S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3} \right)$$

を S^2_0 上に制限した写像によって \mathbb{R}^2 に射影してできる曲線は、 t をパラメータとする媒介変数表示では、 $c = \tan(\pi/12)$ と置くと、

$$x = e^{\boxed{\text{コ}} \boxed{\text{サ}}}, \quad y = e^{\boxed{\text{シ}} \boxed{\text{ス}}}$$

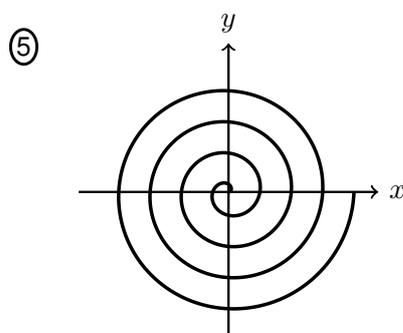
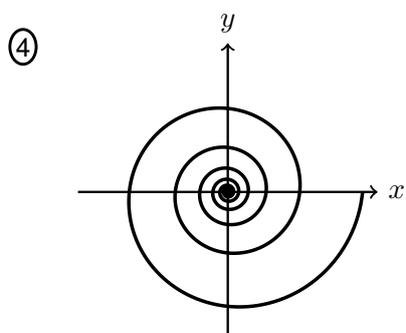
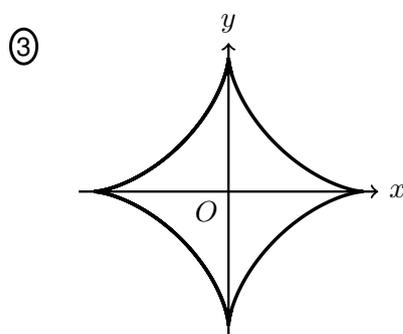
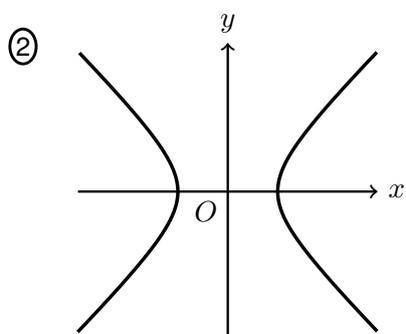
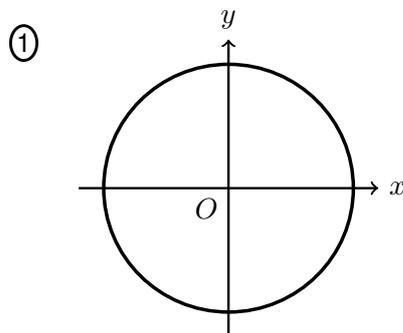
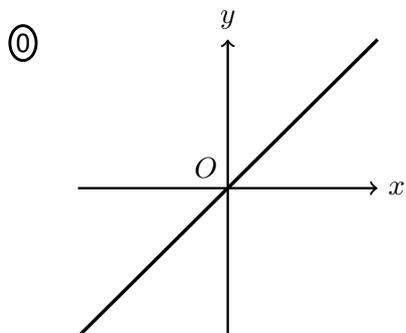
である。また、この曲線のグラフの概形 (の一部) は、 $\boxed{\text{セ}}$ である。

$\boxed{\text{コ}} \sim \boxed{\text{ス}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

① t	② $-t$	③ $\sin t$	④ $\cos t$	⑤ $\tan t$
⑥ $\frac{t}{c}$	⑦ $-\frac{t}{c}$	⑧ $\sin\left(\frac{t}{c}\right)$	⑨ $\cos\left(\frac{t}{c}\right)$	⑩ $\tan\left(\frac{t}{c}\right)$

(Online Math Contest—Proxima Technology 杯第 3 問は次ページに続く.)

セ については、最も適当なものを次の①～⑤のうちから一つ選べ。



(Online Math Contest—Proxima Technology 杯第 3 問は次ページに続く.)

(3) 太郎さんと花子さんは Mercator 図法の “直線” の定め方について話している。

太郎: 球面などの空間の上で “直線” を考えるためには, 平行移動を定める必要があったね.

花子: 接ベクトルの平行移動を, Mercator 図法の地図上で, その接ベクトルの緯線・経線と成す角がそれぞれ平行移動の間は一定であるように定めたとき, “曲がり具合” や “捻じれ具合” はどうなるのかな?

S_0^2 上のベクトル場を

$$e_1 = \frac{1}{\boxed{\text{ケ}}} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad e_2 = \frac{1}{\boxed{\text{ケ}}} \frac{\partial}{\partial \psi}$$

によって定める. そして, S_0^2 上の**平行移動**を次で定める.

平行移動

$p, q \in S_0^2$ を任意の 2 点とし, $\gamma: [0, 1] \rightarrow S_0^2$ を p を始点として q を終点とする任意のなめらかな曲線とする. $v \in T_p S_0^2$ を p 上の任意の接ベクトルとしたとき,

$$\begin{aligned} g_{S_0^2}(v, e_1(p)) &= g_{S_0^2}(w, e_1(q)), \\ g_{S_0^2}(v, e_2(p)) &= g_{S_0^2}(w, e_2(q)) \end{aligned}$$

を満たす接ベクトル $w \in T_q S_0^2$ が一意に存在する. v に対してこの w を対応させることで平行移動を定める.

この**平行移動**により, S_0^2 上のアフィン接続 ∇ を定義する. ただし, 一般になめらかな多様体 M 上のアフィン接続 ∇ とは, 接ベクトル束 TM 上の接続 $\nabla: \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes TM)$ のことを指す.

(Online Math Contest—Proxima Technology 杯第 3 問は次ページに続く.)

一般に、なめらかな n 次元多様体 M のアフィン接続 ∇ に対して、 M の座標近傍 U 上の TM の枠場 $e_1, \dots, e_n \in \Gamma(TM|_U)$ をとったとき、 ∇ に関する接続形式 $\Gamma_{ij}^k: U \rightarrow \mathbb{R}$ ($i, j, k = 1, \dots, n$) とは、

$$\nabla_{e_i} e_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k e_k$$

が成り立つものとして定められる U 上の関数であった。また、 ∇ に関する曲率テンソル R 、捩率テンソル T について

$$\begin{aligned} R(e_i, e_j)e_k &= \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} e_k - \nabla_{e_j} \nabla_{e_i} e_k - \nabla_{[e_i, e_j]} e_k, \\ T(e_i, e_j) &= \nabla_{e_i} e_j - \nabla_{e_j} e_i - [e_i, e_j] \end{aligned}$$

が成り立つのであった。ただし、ベクトル場 $X, Y \in \Gamma(TM)$ に対して、 $[X, Y] := XY - YX \in \Gamma(TM)$ によってベクトル場の交換子積を表す。

すると今、 S_0^2 において、それぞれ前頁で定めたベクトル場 e_1, e_2 と、平行移動から誘導されるアフィン接続 ∇ に関しては、 $i, j, k = 1, 2$ に対して、接続形式 Γ_{ij}^k はそれぞれ

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \boxed{\text{ソ}}, & \Gamma_{11}^2 &= \boxed{\text{タ}}, & \Gamma_{12}^1 &= \boxed{\text{チ}}, & \Gamma_{12}^2 &= \boxed{\text{ツ}}, \\ \Gamma_{21}^1 &= \boxed{\text{テ}}, & \Gamma_{21}^2 &= \boxed{\text{ト}}, & \Gamma_{22}^1 &= \boxed{\text{ナ}}, & \Gamma_{22}^2 &= \boxed{\text{ニ}} \end{aligned}$$

であり、曲率 $R(e_i, e_j)e_k$ と捩率 $T(e_i, e_j)$ については、それぞれ

$$\begin{aligned} R(e_1, e_2)e_1 &= -R(e_2, e_1)e_1 = \boxed{\text{ヌ}} e_1 + \boxed{\text{ネ}} e_2, \\ R(e_1, e_2)e_2 &= -R(e_2, e_1)e_2 = \boxed{\text{ノ}} e_1 + \boxed{\text{ハ}} e_2, \\ T(e_1, e_2) &= -T(e_2, e_1) = \boxed{\text{ヒ}} e_1 + \boxed{\text{フ}} e_2 \end{aligned}$$

である。

これらの計算結果から、ここで定めた接続 ∇ は S^2 上の Levi-Civita 接続の S_0^2 への制限とは異なることが分かる。

$\boxed{\text{ソ}} \sim \boxed{\text{フ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

① $\sinh \phi$	② $\cosh \phi$	③ $\tanh \phi$	④ $\sinh \psi$	⑤ $\cosh \psi$
⑥ $\tanh \psi$	⑦ $e^\phi + e^\psi$	⑧ 0	⑨ 1	⑩ -1

第4問 (配点 50)

以下の問題を解答するにあたっては、必要に応じて 27 ページの記号表を用いてもよい。

Hopf 束について、いくつかの幾何学的な側面を観察していく。まず準備として、登場する多様体の紹介をする。

- \mathbb{R}^n を n 次元実 Euclid 空間, \mathbb{C}^n を n 次元複素 Euclid 空間とする. \mathbb{R}^{2n} と \mathbb{C}^n を

$$\mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{C}^n; \quad (x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}) \longmapsto (x_1 + \sqrt{-1}x_2, \dots, x_{2n-1} + \sqrt{-1}x_{2n})$$

によって同一視する.

- $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ を n 次元単位球面とし, 自然な包含写像を $\iota: S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ とおく. また, 上で定めた同一視 $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$ によって, S^{2n-1} は, $S^{2n-1} = \{(z_1, \dots, z_n) \mid |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^n$ と見ることができる. そして, S^n の局所座標系を立体射影によって定める. すなわち, S^n の開集合 U_N, U_S を

$$U_N = S^n \setminus (0, \dots, 0, 1), \quad U_S = S^n \setminus (0, \dots, 0, -1)$$

と定め, それぞれの上の写像 $\varphi_N: U_N \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi_S: U_S \rightarrow \mathbb{R}^n$ を

$$\begin{aligned} \varphi_N: U_N \longrightarrow \mathbb{R}^n; \quad (x_1, \dots, x_{n+1}) &\longmapsto \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}} \right), \\ \varphi_S: U_S \longrightarrow \mathbb{R}^n; \quad (x_1, \dots, x_{n+1}) &\longmapsto \left(\frac{x_1}{1+x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1+x_{n+1}} \right) \end{aligned}$$

によって定め, $\{(U_N, \varphi_N), (U_S, \varphi_S)\}$ を S^n の局所座標系としてとる.

- $\mathbb{C}P^n$ を n 次元複素射影空間とする. すなわち, $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ 上の同値関係 \sim を, 「 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ に対して, ある $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ が存在して, $z_1 = \lambda z_2$ が成り立つとき, $z_1 \sim z_2$ である。」と定めたとき, $\mathbb{C}P^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$ である. また, $\mathbb{C}P^1$ 上の開集合 U_1, U_2 と, その上の写像 $\varphi_1: U_1 \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi_2: U_2 \rightarrow \mathbb{C}$ をそれぞれ,

$$U_1 := \{[z_1 : z_2] \in \mathbb{C}P^1 \mid z_1 \neq 0\}, \quad U_2 := \{[z_1 : z_2] \in \mathbb{C}P^1 \mid z_2 \neq 0\},$$

$$\begin{aligned} \varphi_1: U_1 \longrightarrow \mathbb{C}; \quad [z_1 : z_2] &\longmapsto \frac{z_2}{z_1}, \\ \varphi_2: U_2 \longrightarrow \mathbb{C}; \quad [z_1 : z_2] &\longmapsto \frac{z_1}{z_2} \end{aligned}$$

によって定めると, $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ は $\mathbb{C}P^1$ の複素多様体としての局所座標系となる. よって, $\mathbb{C}P^1$ は複素多様体であり, 特に実多様体である.

- 1 次元ユニタリ群を $U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ と表す. また, $U(1)$ の Lie 代数を $\mathfrak{u}(1) = \sqrt{-1}\mathbb{R}$ と表す.

(Online Math Contest—Proxima Technology 杯第 4 問は次ページに続く.)

登場する多様体の紹介は以上として、次に Hopf 束を定義する。 $U(1)$ の S^3 への右作用 $S^3 \curvearrowright U(1)$ を、 $(z_1, z_2) \in S^3 \subset \mathbb{C}^2$, $e^{\sqrt{-1}\theta} \in U(1)$ に対して

$$(z_1, z_2) \cdot e^{\sqrt{-1}\theta} := (z_1 e^{\sqrt{-1}\theta}, z_2 e^{\sqrt{-1}\theta}) \quad \textcircled{1}$$

によって定める。

この作用による商空間 $S^3/U(1)$ は、 $[(z_1, z_2)] \in S^3/U(1)$ に対して、 $[z_1 : z_2] \in \mathbb{C}P^1$ を対応させることで、1次元複素射影空間 $\mathbb{C}P^1$ と同一視される。商写像と同一視の合成を

$$\pi_{S^3} : S^3 \longrightarrow S^3/U(1) \cong \mathbb{C}P^1$$

とおく。この組 $(\pi_{S^3}, S^3, \mathbb{C}P^1)$ を Hopf 束、あるいは Hopf ファイブレーションと呼ぶ。この組が実際にファイブレーションの構造を持つことは後で見る。それではこれからこの Hopf 束の幾何学的な側面を観察していこう。

(Online Math Contest—Proxima Technology 杯第 4 問は次ページに続く.)

(1) まず始めに, Hopf 束の Riemann 幾何学的な側面を観察していく. \mathbb{R}^n 上の標準的な Riemann 計量を

$$g_{\mathbb{R}^n} = dx_1 \otimes dx_1 + \cdots + dx_n \otimes dx_n$$

とおく. すると包含写像 $\iota: S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ により, S^n に Riemann 計量 $g_{S^n} = \iota^* g_{\mathbb{R}^{n+1}}$ が自然に誘導される. このとき, 1 点 $[z_1 : z_2] \in \mathbb{C}P^1$ 上のファイバー $\pi_{S^3}^{-1}([z_1 : z_2]) \subset S^3$ は S^3 内の大円であるから, したがって, (S^3, g_{S^3}) 上の測地線であり, 特に極小部分多様体である. その長さは ア π である.

$\varphi_1(U_1) \subset \mathbb{C}$ 上の座標を z で表し, $\varphi_2(U_2) \subset \mathbb{C}$ 上の座標を w で表したとき, $\varphi_1(U_1) \subset \mathbb{C}$ 上の Hermite 計量 h_1 と $\varphi_2(U_2) \subset \mathbb{C}$ 上の Hermite 計量 h_2 をそれぞれ,

$$h_1(z) = \frac{dz \otimes d\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2}, \quad h_2(w) = \frac{dw \otimes d\bar{w}}{(1 + |w|^2)^2}$$

によって定める. すると, $w \in \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ に対して,

$$h_1(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(w)) = h_2(w)$$

が成り立つ. したがって, h_1 と h_2 から $\mathbb{C}P^1$ 全体の上の Hermite 計量が定まる. この Hermite 計量を Fubini–Study 計量といい, Fubini–Study 計量の実部が誘導する $\mathbb{C}P^1$ 上の Riemann 計量を g_{FS} とおく. このとき, 商写像 $\pi_{S^3}: S^3 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ は Riemann 多様体 (S^3, g_{S^3}) , $(\mathbb{C}P^1, g_{\text{FS}})$ に関する Riemann 沈め込みになる.

また, $\Phi: \mathbb{C}P^1 \rightarrow S^2$ を, $U_1 \subset \mathbb{C}P^1$ の上で

$$\varphi_N \circ \Phi \circ \varphi_1^{-1}(x_1 + \sqrt{-1}x_2) = (x_1, x_2)$$

が成り立ち, $\mathbb{C}P^1 \setminus U_1 (= \{[0 : 1]\})$ の上で

$$\Phi([0 : 1]) = (0, 0, 1)$$

となるように定める. すると, $\Phi: \mathbb{C}P^1 \rightarrow S^2$ は微分同相写像であり, Φ に関して, g_{FS} と g_{S^2} の間には

$$g_{\text{FS}} = \frac{1}{\text{イ}} \Phi^* g_{S^2}$$

が成り立つ.

以下では, Φ によって $\mathbb{C}P^1$ と S^2 を同一視して, Hopf 束を $\pi_{S^3}: S^3 \rightarrow S^2$ ともみなす.

(Online Math Contest—Proxima Technology 杯第 4 問は次ページに続く.)

Online Math Contest—Proxima Technology 杯

S^n 上の g_{S^n} に関する Levi-Civita 接続を $\nabla_{\text{LC}}^{TS^n} : \Gamma(TS^n) \rightarrow \Gamma(T^*S^n \otimes TS^n)$ とおく. すると, $\nabla_{\text{LC}}^{TS^3}$ と $\nabla_{\text{LC}}^{TS^2}$ から, $T^*S^3 \otimes \pi_{S^3}^*TS^2$ 上の接続

$$\nabla : \Gamma(T^*S^3 \otimes \pi_{S^3}^*TS^2) \rightarrow \Gamma(T^*S^3 \otimes T^*S^3 \otimes \pi_{S^3}^*TS^2)$$

が誘導される. このとき, 商写像 π_{S^3} の微分 $d\pi_{S^3} : TS^3 \rightarrow \pi_{S^3}^*TS^2$ について, $d\pi_{S^3} \in \Gamma(T^*S^3 \otimes \pi_{S^3}^*TS^2)$ とみれば, $\nabla d\pi_{S^3} \in \Gamma(T^*S^3 \otimes T^*S^3 \otimes \pi_{S^3}^*TS^2)$ が定まる.

今, S^3 の立体射影 φ_N による座標を $u = (u_1, u_2, u_3)$, S^2 の立体射影 φ_N による座標を $v = (v_1, v_2)$ とおく. そして, $p = (0, 1, 0, 0) \in S^3$ としたとき, $p \in S^3$ と $\pi_{S^3}(p) \in S^2$ のそれぞれの近傍で定まっているベクトル場として

$$e_1 = \frac{(1+|u|^2)}{2} \frac{\partial}{\partial u_1}, \quad e_2 = \frac{(1+|u|^2)}{2} \frac{\partial}{\partial u_2}, \quad e_3 = \frac{(1+|u|^2)}{2} \frac{\partial}{\partial u_3},$$

$$f_1 = \frac{(1+|v|^2)}{2} \frac{\partial}{\partial v_1}, \quad f_2 = \frac{(1+|v|^2)}{2} \frac{\partial}{\partial v_2}$$

をとると

$$\sum_{i=1}^3 (\nabla d\pi_{S^3})_p(e_i(p), e_i(p)) = \boxed{\text{ウ}} f_1(\pi_{S^3}(p)) + \boxed{\text{エ}} f_2(\pi_{S^3}(p))$$

が成り立つ. これは π_{S^3} のテンション場の p における値である.

ウ, エ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

① 0	② 1	③ $\frac{1}{2}$	④ $\frac{1}{4}$	⑤ $\frac{1}{8}$
⑥ -1	⑦ π	⑧ $\frac{\pi}{2}$	⑨ $\frac{\pi}{4}$	⑩ $\frac{\pi}{8}$

(Online Math Contest—Proxima Technology 杯第 4 問は次ページに続く.)

(2) 次に視点を変えて、主束の構造に注目して Hopf 束を観察する. $\pi_{S^3}: S^3 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ は主 $U(1)$ 束である. 実際, $S^3|_{U_i} := \pi_{S^3}^{-1}(U_i)$, $i = 1, 2$ とおき, 写像 $\psi_i: S^3|_{U_i} \rightarrow U_i \times U(1)$, $i = 1, 2$ を

$$\psi_1(z_1, z_2) = \left([z_1 : z_2], \frac{z_1}{|z_1|} \right), \quad \psi_2(z_1, z_2) = \left([z_1 : z_2], \frac{z_2}{|z_2|} \right)$$

によって定める. すると, $\pi_{S^3}: S^3 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ は ψ_1, ψ_2 を局所自明化とする主 $U(1)$ 束となる.

また, $e^{\sqrt{-1}\theta} \in U(1)$ に対して, $R_{e^{\sqrt{-1}\theta}}: S^3 \rightarrow S^3$ を①で定めた右作用を用いて,

$$R_{e^{\sqrt{-1}\theta}}(z_1, z_2) = (z_1, z_2) \cdot e^{\sqrt{-1}\theta}$$

によって定める. このとき,

$$R_{e^{\sqrt{-1}\theta}}(x_1 + \sqrt{-1}x_2, x_3 + \sqrt{-1}x_4) \in S^3$$

を \mathbb{R}^4 の座標で表示すると,

$$(x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta, x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta, x_3 \cos \theta - x_4 \sin \theta, x_3 \sin \theta + x_4 \cos \theta)$$

となる.

$X \in \mathbb{R}$ に対して, $\sqrt{-1}X \in \mathfrak{u}(1)$ である. この $\sqrt{-1}X$ が定める基本ベクトル場 $(\sqrt{-1}X)^\#: S^3 \rightarrow TS^3$ を $p \in S^3$ に対して,

$$(\sqrt{-1}X)^\#(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} R_{\exp(\sqrt{-1}Xt)}(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} p \cdot \exp(\sqrt{-1}Xt)$$

によって定める. これを \mathbb{R}^4 の座標 (x_1, x_2, x_3, x_4) とその上のベクトル場 $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4}$ を使って表すと,

$$(\sqrt{-1}X)^\# = X \left(\boxed{\text{オ}} \frac{\partial}{\partial x_1} + \boxed{\text{カ}} \frac{\partial}{\partial x_2} + \boxed{\text{キ}} \frac{\partial}{\partial x_3} + \boxed{\text{ク}} \frac{\partial}{\partial x_4} \right)$$

である.

オ ~ ク の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

①	0	②	1	③	x_1	④	$-x_1$	⑤	x_2
⑥	$-x_2$	⑦	x_3	⑧	$-x_3$	⑨	x_4	⑩	$-x_4$

(Online Math Contest—Proxima Technology 杯第 4 問は次ページに続く.)

TS^3 上の分布 H を

$$H := (\ker d\pi_{S^3})^{\perp_{gS^3}} = \bigsqcup_{p \in S^3} \left(\{v \in T_p S^3 \mid (d\pi_{S^3})_p(v) = 0\}^{\perp_{gS^3}} \right)$$

によって定める. すると H は $U(1)$ 不変な水平分布を定める. ただし, 一般に主 G 束 $\pi_P: P \rightarrow M$ 上の G 不変な水平分布とは, 分布 $\{H_p \subset T_p: \text{部分空間} \mid p \in P\}$ であって, 次の 2 条件を満たすものである.

1. 任意の $p \in P$ に対して, $T_p P = \ker(d\pi_P)_p \oplus H_p$ が成り立つ.
2. 任意の $p \in P, g \in G$ に対して, $(dR_g)_p H_p = H_{p \cdot g}$ が成り立つ. ただし, $p \in P$ に対して, $R_g(p) = p \cdot g \in P$ とする.

一般に, S^3 上の接続 1 形式 $A \in \Gamma(T^*S^3 \otimes \mathfrak{u}(1))$ は, 分布

$$H_A := \ker A := \bigsqcup_{p \in S^3} \{v \in T_p S^3 \mid A_p(v) = 0\}$$

を定める. H_A と H が一致するような接続 1 形式 A は, \mathbb{R}^4 の座標 (x_1, x_2, x_3, x_4) とその上の 1 形式 dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 を使って

$$A = \sqrt{-1} \left(\boxed{\text{ケ}} dx_1 + \boxed{\text{コ}} dx_2 + \boxed{\text{サ}} dx_3 + \boxed{\text{シ}} dx_4 \right)$$

と表される. ただし, 一般に, Lie 群 G とその Lie 代数 \mathfrak{g} について, A が主 G 束 $\pi_P: P \rightarrow M$ の接続 1 形式であるとは, $A \in \Gamma(T^*P \otimes \mathfrak{g})$ であり, 次の 2 つの性質を満たすことである.

1. 任意の $X \in \mathfrak{g}, p \in P$ に対して, $A_p(X^\#(p)) = X$ が成り立つ.
2. 任意の $g \in G, p \in P, v \in T_p P$ に対して, $(R_g^* A)_p(v) = \text{Ad}_{g^{-1}}(A_p(v))$ が成り立つ.

ケ ~ シ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

① 0	② 1	③ x_1	④ $-x_1$	⑤ x_2
⑥ $-x_2$	⑦ x_3	⑧ $-x_3$	⑨ x_4	⑩ $-x_4$

(Online Math Contest—Proxima Technology 杯第 4 問は次ページに続く.)

この接続形式 A に対する曲率形式 F_A は, 再び \mathbb{R}^4 の座標 (x_1, x_2, x_3, x_4) とその上の 1 形式 dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 を使って表すと,

$$F_A = 2\sqrt{-1} \left(\boxed{\text{ス}} dx_1 \wedge dx_2 + \boxed{\text{セ}} dx_1 \wedge dx_3 + \boxed{\text{ソ}} dx_1 \wedge dx_4 + \boxed{\text{タ}} dx_2 \wedge dx_3 + \boxed{\text{チ}} dx_2 \wedge dx_4 + \boxed{\text{ツ}} dx_3 \wedge dx_4 \right)$$

である.

$\boxed{\text{ス}} \sim \boxed{\text{ツ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

① 0	② 1	③ x_1	④ $-x_1$	⑤ x_2
⑥ $-x_2$	⑦ x_3	⑧ $-x_3$	⑨ x_4	⑩ $-x_4$

曲率 F_A に対して成り立つ事実を 1 つ指摘しておく. $\mathbb{C}P^1$ に関して Fubini–Study 計量から定まる体積形式を Ω と置く. すると, $\varphi_1(U_1) \subset \mathbb{C}$ 上の座標を z としたとき,

$$(\varphi_1^{-1})^* \Omega = \frac{\sqrt{-1}}{2} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2}$$

と表される. さらに,

$$\pi_{S^3}^* (2\sqrt{-1}\Omega) = F_A$$

が成り立つ.

[補足] Hopf 束の局所的な切断

$$\sigma_i: U_i \rightarrow S^3|_{U_i} \quad (i = 1, 2)$$

を, 局所自明化 $\psi_i: S^3|_{U_i} \rightarrow U_i \times U(1)$ に関して,

$$\psi_i \circ \sigma_i(x) = (x, 1) \quad (x \in U_i)$$

を満たすように定める. このとき, σ_i によって $F_A|_{U_i}$ を引き戻した $\{\sigma_i^* F_A|_{U_i}\}_{i=1,2}$ は $\mathbb{C}P^1$ 上の $u(1)$ に値をとる 2 形式を定める. この 2 形式を $\mathbb{C}P^1$ 上で積分すると 0 にならないことが確かめられる. すると Stokes の定理より, この 2 形式が完全形式ではないことがわかる. このことから, Hopf 束の第一 Chern 類は非自明であることが従い, よって Hopf 束は主 $U(1)$ 束として非自明であることがわかる.

(Online Math Contest—Proxima Technology 杯第 4 問は次ページに続く.)

(3) 最後にホモトピー論的な視点から Hopf 束を観察する. Hopf 束 $\pi_{S^3}: S^3 \rightarrow CP^1$ について, ファイバー束に関するホモトピー完全系列から

$$\cdots \rightarrow \pi_3(U(1)) \rightarrow \pi_3(S^3) \rightarrow \pi_3(CP^1) \rightarrow \pi_2(U(1)) \rightarrow \cdots$$

が成り立つ. 今, $U(1)$ と S^1 を

$$S^1 \rightarrow U(1); \quad (\cos \theta, \sin \theta) \mapsto e^{\sqrt{-1}\theta}$$

によって同一視する. また, 微分同相 Φ によって $CP^1 \cong S^2$ と同一視する. すると, 球面のホモトピー群に関して,

$$\pi_q(S^n) \cong \begin{cases} 0 & (q < n) \\ \mathbb{Z} & (q = n) \end{cases}, \\ \pi_q(S^1) \cong 0 \quad (2 \leq q)$$

が知られているため, $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z} \boxed{\tau}$ である.

この同型を与える方法 1 つを紹介する. S^n に, \mathbb{R}^{n+1} の標準的な向きから誘導される向きを入れる. 一般に, $f: S^3 \rightarrow S^2$ をなめらかな写像とし, S^2 の 2 次 de Rham コホモロジー $H_{\text{dR}}^2(S^2)$ の生成元の代表元として

$$\eta := \frac{1}{4\pi} (x_1 dx_2 \wedge dx_3 - x_2 dx_1 \wedge dx_3 + x_3 dx_1 \wedge dx_2)$$

をとる. すると, $H_{\text{dR}}^2(S^3) \cong 0$ であるため, $f^*\eta = d\omega$ を満たす S^3 上の 1 形式 $\omega \in \Gamma(\wedge^1 T^*S^3)$ が存在する. このとき,

$$H(f) = \int_{S^3} \omega \wedge d\omega$$

と定めると, この値は ω のとり方に依らない. さらに, 連続写像 $g: S^3 \rightarrow S^2$ が f とホモトピー同値ならば, $H(f) = H(g)$ が成り立つ. 加えて, f の任意の異なる正則値 $p_1, p_2 \in S^2$ をとったとき, $f^{-1}(p_1), f^{-1}(p_2)$ はそれぞれ S^1 と同相になるが, $f^{-1}(p_1)$ と $f^{-1}(p_2)$ の絡み数と $H(f)$ が一致することが知られており, これより $H(f) \in \mathbb{Z} \boxed{\tau}$ であることが従う.

そこで, Hopf 束の射影 $\pi_{S^3}: S^3 \rightarrow S^2$ に対する $H(\pi_{S^3})$ を求めよう. $\Phi: CP^1 \rightarrow S^2$ は向きを逆にする微分同相写像であり, $\Phi^*: H_{\text{dR}}^2(S^2) \rightarrow H_{\text{dR}}^2(CP^1)$ は, $H_{\text{dR}}^2(S^2)$ の生成元を $H_{\text{dR}}^2(CP^1)$ の生成元の -1 倍に写す. 一方, CP^1 において, Fubini-Study 計量に関する体積形式 Ω に対して, $\frac{1}{\pi}[\Omega] \in H_{\text{dR}}^2(CP^1)$ は de Rham コホモロジーの生成元となる. したがって,

$$H(\pi_{S^3}) = \boxed{\iota}$$

である.

(Online Math Contest—Proxima Technology 杯第 4 問は次ページに続く.)

第4問で用いられる記号表

- なめらかな多様体 M 上のベクトル束 $\pi: E \rightarrow M$ に対して, $\Gamma(E)$ で E のなめらかな切断全体を表す. すなわち, $\Gamma(E) := \{s: M \rightarrow E \mid s \text{ はなめらかかつ } \pi \circ s = \text{id}_M\}$ である.
- なめらかな多様体 M に対して TM で M の接ベクトル束, T^*M で M の余接ベクトル束を表す.
- なめらかな多様体 M, N の間のなめらかな写像 $f: M \rightarrow N$ に対して,
 - $df: TM \rightarrow f^*TN$ で f の微分 (接写像) を表す. $N = \mathbb{R}$ のときには df は f の外微分を表す.
 - N 上の微分形式 ω の f による引き戻し (pull-back) を $f^*\omega$ と表す.
 - N 上のベクトル束 $E \rightarrow N$ の f による引き戻し (pull-back) を $f^*E \rightarrow M$ と表す.
- 群 G が集合 X に右から作用することを $X \curvearrowright G$ と表す.
- 連結な多様体 X の n 次ホモトピー群を基点を省略して $\pi_n(X)$ と表す.

第5問 (配点 50)

以下では、虚数単位 $\sqrt{-1}$ を i と表す. \mathbb{C}^2 の標準的な内積を $\langle x|y \rangle (= \sum_{i=1,2} \bar{x}_i y_i)$ で表す. また、この問題で用いる行列はすべて 2×2 複素行列である.

複素行列 $A \in M_2(\mathbb{C})$ が半正定値であることを、すべての $x \in \mathbb{C}^2$ に対して、 $\langle x|Ax \rangle \geq 0$ であると定義し、 $A \geq 0$ と表す. $A \in M_2(\mathbb{C})$ が正定値であることを、すべての零ベクトルではない $x \in \mathbb{C}^2$ に対して、 $\langle x|Ax \rangle > 0$ であると定義し、 $A > 0$ と表す. エルミート行列 A が半正定値 ($A \geq 0$) であるならば **ア** である. 半正定値行列 A, B に対して、 $A \geq B$ であることを $A - B \geq 0$ と定める.

行列 A が半正定値で、固有値が t_1, t_2 であるとき、ユニタリ行列 U を用いて、

$$A = U \operatorname{diag}(t_1, t_2) U^*$$

と対角化ができるので、半正定値行列 A と 0 より大きい実数 p に対して、 A^p を

$$A^p := U \operatorname{diag}(t_1^p, t_2^p) U^*$$

と定める. これは対角化の仕方によらず定まるものであり、 p が自然数であるときには、ここで定義した A^p は行列の積から定まるもの ($A \times A \times \cdots \times A$) と一致する.

ア の解答群

- ① A の固有値がすべて 0 以上であることと同値
- ② A の固有値の和が 0 以上であることと同値
- ③ A の固有値の積が 0 以上であることと同値
- ④ A の固有値の絶対値が 1 であることと同値
- ⑤ A の固有値とは無関係

下線部では、 A が半正定値であることから導かれる性質を用いた. このことに関して、次の中で真であるものを 1, 偽であるものを 0 とし、2 進法表示で $abcde_{(2)}$ となる数を 10 進法で表すと

イウ である.

- a. A が半正定値ならば、 $A^* A = AA^*$ を満たす.
- b. A が半正定値ならば、 $A = A^*$ を満たす.
- c. A が半正定値ならば、 $A^2 = A = A^*$ を満たす.
- d. A が半正定値ならば、 $A^* A = I$ を満たす.
- e. A が半正定値ならば、 $A^* A = I = AA^*$ を満たす.

(Online Math Contest—Proxima Technology 杯第 5 問は次ページに続く.)

これから、この半正定値行列の p のべきについて、前頁で定義した行列の順序がどのようになるかを調べていく。

まずは言葉を定義する。 p を 0 より大きい実数とし、半正定値行列 X に対し $f_p(X) = X^p$ と定める。任意の半正定値行列 $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ に対し、 $A \leq B$ ならば $f_p(A) \leq f_p(B)$ をみたすとき f_p を行列の単調増加関数と呼ぶことにし、 $A \leq B$ ならば $f_p(A) \geq f_p(B)$ をみたすとき f_p を行列の単調減少関数と呼ぶことにする。

まずはじめに半正定値行列 A, B, C を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

として、前頁で定めた順序について考えていく。

以下の \boxed{a} , \boxed{b} , \boxed{c} について、前頁で定義した行列の順序の \leq が成立するならば 1, その順序 \leq が成り立たないならば 0 とする。このとき、2 進法で $abc_{(2)}$ と表される数を 10 進法で表すと、

- $A \boxed{a} B, A \boxed{b} C, B \boxed{c} C$ については $\boxed{\text{エ}}$ となる。
- $A^2 \boxed{a} B^2, A^2 \boxed{b} C^2, B^2 \boxed{c} C^2$ については $\boxed{\text{オ}}$ となる。

したがって $f_2(A) = A^2$ は行列の単調増加関数ではないことがわかる。これは行列の順序ならではの現象である。

(Online Math Contest—Proxima Technology 杯第 5 問は次ページに続く。)

では、次に実数 p を $p \in (1, \infty)$ とする。ここで、半正定値行列 D, E を

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

とする。このとき、 $D \leq E$ であることがわかる。また、 D^p, E^p を計算すると、各成分はそれぞれ

$$D^p = \begin{pmatrix} \boxed{\text{カ}} & \boxed{\text{キ}} \\ \boxed{\text{ク}} & \boxed{\text{ケ}} \end{pmatrix}, \quad E^p = \begin{pmatrix} \boxed{\text{コ}} & \boxed{\text{サ}} \\ \boxed{\text{シ}} & \boxed{\text{ス}} \end{pmatrix}$$

であるので、 $E^p - D^p$ の行列式を計算すると、

$$\det(E^p - D^p) = \boxed{\text{セ}} \left(\boxed{\text{ソ}} - \frac{1}{2} \boxed{\text{タ}} - \frac{1}{2} \right)$$

となる。この行列式の値は $p > 1$ のときに常に $\boxed{\text{チ}}$ ので、 $D^p \not\leq E^p$ となる。

よって、 p が 1 より大きいときについても $f_p(A) = A^p$ は行列の単調増加関数でないことがわかる。

$\boxed{\text{カ}} \sim \boxed{\text{タ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

① 0	② $\frac{1}{2}$	③ $\frac{3}{2}$	④ $\frac{3}{4}$
⑤ $\left(\frac{1}{2}\right)^p$	⑥ $\left(\frac{3}{2}\right)^p$	⑦ $\left(\frac{3}{4}\right)^p$	⑧ 1

$\boxed{\text{チ}}$ については、最も適当なものを、①～④のうちから一つ選べ。

① 0 以上である
② 0 以下である
③ 0 より大きくなる
④ 0 より小さくなる
⑤ 0 である

(Online Math Contest—Proxima Technology 杯第 5 問は次ページに続く.)

では最後に、 $p \in (0, 1)$ であるときを考える。簡単のために正定値であるときのみの行列の単調性について考えていこう。

まずはじめに、任意の半正定値行列 C について、 C をあるユニタリ行列 U を用いて、 $C = U \text{diag}(t_1, t_2)U^*$ と表示する。このとき、 $I + C$ の逆行列は

$$(I + C)^{-1} = U \begin{pmatrix} \boxed{\text{ツ}} & 0 \\ 0 & \boxed{\text{テ}} \end{pmatrix} U^*$$

であるので、

$$I - (I + C)^{-1} = U \begin{pmatrix} 1 - \boxed{\text{ツ}} & 0 \\ 0 & 1 - \boxed{\text{テ}} \end{pmatrix} U^*$$

となる。ここで、 C が半正定値であることから、 $1 - \boxed{\text{ツ}}$ 、 $1 - \boxed{\text{テ}}$ はともに 0 以上であることがわかるので、 C が半正定値行列であるとき $I - (I + C)^{-1}$ もまた半正定値行列であることがわかる。

$\boxed{\text{ツ}}$ の解答群

- | | | | |
|--------------|--------------------|------------------|-------------|
| ① t_1^{-1} | ② $(t_1 + 1)^{-1}$ | ③ $t_1^{-1} + 1$ | ④ $t_1 + 1$ |
|--------------|--------------------|------------------|-------------|

$\boxed{\text{テ}}$ の解答群

- | | | | |
|--------------|--------------------|------------------|-------------|
| ① t_2^{-1} | ② $(t_2 + 1)^{-1}$ | ③ $t_2^{-1} + 1$ | ④ $t_2 + 1$ |
|--------------|--------------------|------------------|-------------|

(Online Math Contest—Proxima Technology 杯第 5 問は次ページに続く.)

次に, A, B をともに正定値である行列とし, $A \leq B$ を仮定する. ここで, B を次のように変形する:

$$\begin{aligned} B &= A + (B - A) \\ &= A^{1/2}(I + A^{-1/2}(B - A)A^{-1/2})A^{1/2}. \end{aligned}$$

ここで, $A^{-1/2}$ は $A^{1/2}$ の逆行列を表す. よって, $A^{-1} - B^{-1}$ は,

$$A^{-1} - B^{-1} = A^{-1/2} \left(I - (I + \boxed{\text{ト}}) \right)^{-1} A^{-1/2}$$

と変形できる. ここで, 任意の半正定値行列 C, D に対して, CDC もまた半正定値になることと, 前頁で示した事実を使うと, $A^{-1} - B^{-1}$ は半正定値となる. つまり, 逆行列を与える関数 $f_{-1}(A) = A^{-1}$ は正定値行列全体を定義域として行列の単調減少関数である.

$\boxed{\text{ト}}$ の解答群

① $B - A$	② $A^{-1/2}(B - A)A^{-1/2}$	③ $I + A^{-1/2}(B - A)A^{-1/2}$
④ $(B - A)^{-1}$	⑤ $A^{1/2}(B - A)^{-1}A^{1/2}$	⑥ $(I + A^{-1/2}(B - A)A^{-1/2})^{-1}$

下線部に関して, 複素線形写像 $\Phi: M_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_2(\mathbb{C})$ が, 半正定値行列 X に対して $\Phi(X)$ もまた半正定値行列であるとき, これを**正写像**という. 下線部で表すような, 任意の半正定値行列 C を用いた複素線形写像 $\Phi: X \mapsto CXC$ は正写像の一例である.

ではここで, 次の中で**複素線形な正写像**であるものを 1, そうでないものを 0 とし, 2 進法で $abcdefgh_{(2)}$ と表される数を 10 進法で表した数は $\boxed{\text{ナニヌ}}$ である.

- a. $\Phi_a(X) = {}^tX$.
- b. $\Phi_b(X) = X^*$.
- c. $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ としたとき, $\Phi_c(X) = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 \\ 0 & x_{22} \end{pmatrix}$.
- d. $\Phi_d(X) = \text{Tr}(X)I - X$.
- e. $\Phi_e(X) = X^2$.
- f. $\Phi_f(X) = (X^*X)^{1/2}$.
- g. 任意の半正定値行列 C について $\Phi_g(X) = CX$.
- h. 任意の半正定値行列 C について $\Phi_h(X) = C \circ X$. ただし, サイズが等しい行列 A, B に対して, $A \circ B$ は行列の成分ごとの積 (Hadamard 積) を表す.

(Online Math Contest—Proxima Technology 杯第 5 問は次ページに続く.)

ここで少し話は変わって、 $p \in (0, 1)$ であるとき、0 より大きい実数を定義域とする関数 $f(t) = t^p$ ($t \in (0, \infty)$) について考察していく。以下、 p はすべて $p \in (0, 1)$ とする。まず、ベータ関数 $B(p, 1-p)$ は

$$B(p, 1-p) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{-p} dx$$

で与えられるものであった。これを $y = x/(1-x)$ と変数変換をすると

$$B(p, 1-p) = \int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{1+y} dy \quad \text{①}$$

と表すことができる。

また、

$$B(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$$

であることが知られている。これは、ベータ関数とガンマ関数の関係式 $B(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$ ($\operatorname{Re} x > 0, \operatorname{Re} y > 0$) とガンマ関数の相反公式 $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin(\pi z)$ ($z \notin \mathbb{Z}, \operatorname{Re} z > 0$) により従う。

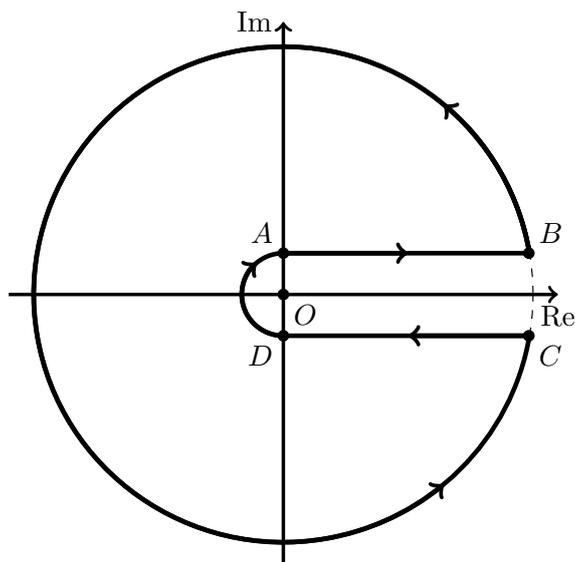
太郎さんと花子さんは $B(p, 1-p) = \pi/\sin(\pi p)$ について話している。

太郎: $B(p, 1-p) = \pi/\sin(\pi p)$ の別の導出方法はないのかな。

花子: ①の積分を複素線積分の留数定理を用いて計算することで導出できそうだよ。

(Online Math Contest—Proxima Technology 杯第 5 問は次ページに続く.)

0 より大きい実数 ε, R を $0 < \varepsilon < 1 < R$ を満たすように任意にとる. 複素平面 \mathbb{C} 上の 4 点 A, B, C, D を A, D はそれぞれ, 実部が 0 で虚部が $\pm\varepsilon$ の点とし, B, C はそれぞれ, 半径 R の円上にあり実部が正でありかつ虚部が $\pm\varepsilon$ の点とする. 積分路 AB, BC, CD, DA を以下に図示する向きでとる.



ここで, 関数 $f: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$ を $f(z) = e^{(p-1)\log(z)}/(1+z)$ ($= z^{p-1}/(1+z)$) と定める. ただし, $\log(z)$ は z の偏角が $(0, 2\pi)$ に入るように選ぶ. これから, 複素積分 $\int_{ABCD A} f(z) dz$ を計算していく.

経路 $ABCD A$ で囲われる領域に含まれる f の極は $z = -1$ のみであり, $z = -1$ における $f(z)$ の留数 $\text{Res}_{z=-1} f(z)$ は である. よって留数定理より,

$$\int_{ABCD A} f(z) dz = 2\pi i \times \text{ }$$

となる.

の解答群

- | | | | |
|-----------------|-----------------|---------------------------|---------------------------|
| ① 0 | ② 1 | ③ -1 | ④ $e^{i\pi p}$ |
| ⑤ $-e^{i\pi p}$ | ⑥ $\sin(\pi p)$ | ⑦ $\frac{1}{\sin(\pi p)}$ | ⑧ $\frac{1}{\cos(\pi p)}$ |

(Online Math Contest—Proxima Technology 杯第 5 問は次ページに続く.)

一方, $\int_{ABCD A} f(z) dz = (\int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA}) f(z) dz$ について, $\varepsilon \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$ の極限を考えると,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{BC} f(z) dz + \int_{DA} f(z) dz \right) = \boxed{\text{ノ}}$$

であり, また,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{AB} f(z) dz + \int_{CD} f(z) dz \right) = \boxed{\text{ハ}} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{y^{p-1}}{1+y} dy$$

となる. したがって,

$$\int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{1+y} dy = \frac{2\pi i \times \boxed{\text{ネ}} - \boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}} = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$$

が導かれた.

$\boxed{\text{ノ}}$, $\boxed{\text{ハ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

① 0	② $2\pi i$	③ $\tan(\pi p)$	④ $\frac{1}{\cos(\pi p)}$
⑤ $\frac{1}{\sin(\pi p)}$	⑥ $1 - e^{i2\pi p}$	⑦ $e^{i\pi p}$	⑧ $e^{-i\pi p}$

(Online Math Contest—Proxima Technology 杯第 5 問は次ページに続く.)

以上の議論より, $p \in (0, 1)$ であるとき,

$$\int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{1+y} dy = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$$

であるので, 任意の 0 より大きい実数 t に対して,

$$t^p = \frac{\sin(\pi p)}{\pi} \int_0^\infty x^{\boxed{\text{ヒ}}} \left(x^{\boxed{\text{フ}}} - (t+x)^{-1} \right) dx$$

と表すことができる. したがって, A^p は

$$A^p = \frac{\sin(\pi p)}{\pi} \int_0^\infty x^{\boxed{\text{ヒ}}} \left(x^{\boxed{\text{フ}}} I - (A+xI)^{-1} \right) dx$$

と表すことができる. 任意の 0 以上の実数 x に対して, $f(A) = -(A+xI)^{-1}$ が行列の単調増加関数であることより, $f_p(A) = A^p$ は $p \in (0, 1)$ のとき, 正定値である定義域上で行列の単調増加関数である.

ヒ, フ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

<input type="radio"/> ①	-1	<input type="radio"/> ①	0	<input type="radio"/> ②	1	<input type="radio"/> ③	2
<input type="radio"/> ④	$p-1$	<input type="radio"/> ⑤	p	<input type="radio"/> ⑥	$p+1$	<input type="radio"/> ⑦	$p+2$

[補足] ここでの議論では正定値行列に制限して議論をしたが, 極限を取る操作などを考えると, 半正定値行列全体を定義域として, $f_p(A) = A^p$ は, $p \in (0, 1)$ のときに行列の単調増加関数であることを導くことができる.

また, $p=1$ のときは, 定義より, $f_p(A) = A$ は行列の単調増加関数であり, すべての半正定値行列 A に対して, $A^0 = I$ と定めると, $f_0(A) = A^0$ も行列の単調増加関数であることとなる.

したがって, $f_p(A) = A^p$ は, $p \in [0, 1]$ のときに行列の単調増加関数であり, $p \in (1, \infty)$ のときには行列の単調増加関数ではない.

第6問 (配点 50)

[1]

(1) 区間 $[0, \pi]$ 上の連続関数全体のなす線形空間を $C[0, \pi]$ とし, I を $C[0, \pi]$ 上の恒等作用素とする. $f \in C[0, \pi]$ に対して, $Tf \in C[0, \pi]$ が

$$(Tf)(x) = \int_0^\pi f(y) \cos(x+y) dy$$

与えられるような線形作用素 $T: C[0, \pi] \rightarrow C[0, \pi]$ を考える. この作用素のスペクトル集合 $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - T \text{ が可逆でない} \}$ について調べよう.

$f, g \in C[0, \pi]$ と $\lambda \in \mathbb{C}$ について $f = (\lambda I - T)g$ が成り立っているとす.

$$\alpha = \int_0^\pi g(y) \cos y dy, \quad \beta = \int_0^\pi g(y) \sin y dy$$

とおくと, $f(x) = \lambda g(x) - (Tg)(x) = \lambda g(x) - \alpha \cos x + \beta \sin x$ より

$$\lambda \alpha = \int_0^\pi \lambda g(y) \cos y dy = \int_0^\pi f(y) \cos y dy + \boxed{\text{ア}} \alpha + \boxed{\text{イ}} \beta,$$

$$\lambda \beta = \int_0^\pi \lambda g(y) \sin y dy = \int_0^\pi f(y) \sin y dy + \boxed{\text{ウ}} \alpha + \boxed{\text{エ}} \beta$$

のように計算できる. よって, $\lambda \neq 0$, $\boxed{\text{オ}}$, $\boxed{\text{カ}}$ のとき,

$$g(x) = \frac{1}{\lambda} f(x) + \frac{1}{\lambda(\lambda - \boxed{\text{オ}})} \left(\int_0^\pi f(y) \cos y dy \right) \cos x - \frac{1}{\lambda(\lambda - \boxed{\text{カ}})} \left(\int_0^\pi f(y) \sin y dy \right) \sin x$$

という等式が得られる. この右辺を $Sf \in C[0, \pi]$ とおくと, S が $\lambda I - T$ の逆作用素となっていることが確かめられる.

$\boxed{\text{ア}} \sim \boxed{\text{カ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

① 0	② 1	③ -1	④ $\frac{\pi}{2}$	⑤ $-\frac{\pi}{2}$
⑥ $\frac{\pi}{4}$	⑦ $-\frac{\pi}{4}$	⑧ $\frac{1}{\pi}$	⑨ $\frac{1}{\pi}$	⑩ π

(Online Math Contest—Proxima Technology 杯第6問は次ページに続く.)

$\lambda = \boxed{\text{オ}}, \boxed{\text{カ}}$ のときはそれぞれ $\dim \ker(\lambda I - T) = \boxed{\text{キ}}, \boxed{\text{ク}}$ となり, 特に $\lambda I - T$ は可逆にならない. また $\text{rank}(T) = \boxed{\text{ケ}}$ なので, $\lambda = 0$ のときも $\lambda I - T$ は可逆でない. したがって,

$$\sigma(T) = \left\{ 0, \boxed{\text{オ}}, \boxed{\text{カ}} \right\}$$

である.

(Online Math Contest—Proxima Technology 杯第 6 問は次ページに続く.)

(2) 区間 $[0, \pi]$ 上 (Lebesgue 測度で) 2 乗可積分関数のなす Hilbert 空間 $L^2[0, \pi]$ を考える.
 $f \in L^2[0, \pi]$ と自然数 n に対して

$$(A_n f)(x) = \int_0^\pi f(y) \cos(2nx + y) dy, \quad (B_n f)(x) = \int_0^\pi f(y) \cos(x + 2ny) dy$$

で有界線形作用素 $A_n, B_n: L^2[0, \pi] \rightarrow L^2[0, \pi]$ を定義する.

(1) と同様に考えることで,

$$\sigma(A_n) = \sigma(B_n) = \left\{ 0, \pm \frac{2\sqrt{\boxed{\text{コ}}^n}}{\boxed{\text{サ}}^n \boxed{\text{シ}} - \boxed{\text{ス}}} \right\}$$

となる.

ここで, $\lambda \in \mathbb{C}$ を $\lambda \notin \bigcup_{n=1}^\infty \sigma(A_n)$ となるようにとって固定する. このとき, λ の選び方に依らず, 作用素の列 $\{(\lambda I - A_n)^{-1}\}_{n=1}^\infty$ は . また $\{(\lambda I - B_n)^{-1}\}_{n=1}^\infty$ は .

, の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

- | |
|---|
| <ul style="list-style-type: none"> ① ノルム位相で収束する ② ノルム位相では収束しないが, 強作用素位相で収束する ③ 強作用素位相では収束しないが, 弱作用素位相で収束する ④ 弱作用素位相で収束しない |
|---|

(Online Math Contest—Proxima Technology 杯第 6 問は次ページに続く.)

[2] 実数 \mathbb{R} 上の Lebesgue 測度を \mathcal{L} , 点 $p \in \mathbb{R}$ に台を持つ Dirac 測度を δ_p と書く. また, \mathcal{L}^+ を, 任意の可測集合 $E \subset \mathbb{R}$ に対して

$$\mathcal{L}^+(E) = \mathcal{L}(E \cap (0, +\infty))$$

を満たすものとする.

以下の各設問で測度 μ と, μ に対して絶対連続な測度 ν を与える. それぞれの場合について Radon–Nikodym 微分

$$f = \frac{d\nu}{d\mu}$$

の指示された点での値を整数もしくは既約分数で答えよ. ただし, f の選び方によって各点における値が一意に定まらないような場合は, 代わりに f が Lebesgue 可測かつ局所可積分であることを用いて, 近傍での平均値

$$\tilde{f}(a) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x) dx$$

の値を整数もしくは既約分数の形で解答せよ.

- (1) $\mu = \mathcal{L}, \nu = \mathcal{L}^+$ とする. このとき, $f(-1) = \boxed{\text{タ}}$, $f(1) = \boxed{\text{チ}}$ である.
- (2) $\mu = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3, \nu = \delta_1 + 2\delta_2$ とする. このとき, $f(1) = \boxed{\text{ツ}}$, $f(2) = \boxed{\text{テ}}$, $f(3) = \boxed{\text{ト}}$ である.
- (3) $\mu = \delta_1 + \delta_2 + \mathcal{L}, \nu = 2\delta_1 + 3\mathcal{L}^+$ とする. このとき, $f(1) = \boxed{\text{ナ}}$, $f(3/2) = \boxed{\text{ニ}}$, $f(2) = \boxed{\text{ヌ}}$ である.
- (4) $\mu = (1 + |x|)\mathcal{L}, \nu = 2\mathcal{L}^+ + x^2\mathcal{L}$ とする. このとき, $f(-1) = \frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$, $f(0) = \boxed{\text{ハ}}$, $f(2) = \boxed{\text{ヒ}}$ である.

(Online Math Contest—Proxima Technology 杯第 6 問は次ページに続く.)

[3] 閉区間 $[0, 2\pi]$ の任意の元 z に対して,

$$\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \frac{e^{inz}}{n^4} = \sum_{k=0}^4 a_k \pi^{4-k} z^k$$

を満たすような $a_0, \dots, a_4 \in \mathbb{Q}$ が存在する. 各 $|a_0|, \dots, |a_4|$ を既約分数で表し, 分子と分母の積をとったものは, 順に , , , , となる.

第7問 (配点 50)

以下では, 虚数単位 $\sqrt{-1}$ を i と表す.

2次元球面 $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ とその上の Dirac モノポールを考える. S^2 の極座標を

$$(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi$$

により定める. (磁荷に相当する) パラメータ q ($\in \mathbb{Z}$) を持つ Dirac モノポールのゲージ場 ($u(1)$ 値 1 形式) を

$$\begin{cases} A_N = i\frac{q}{2}(1 - \cos \theta) d\phi & \left(\theta \leq \frac{\pi}{2}\right) \\ A_S = -i\frac{q}{2}(1 + \cos \theta) d\phi & \left(\theta \geq \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

とし, これらの $\theta = \pi/2$ でのゲージ変換を

$$A_N = g^{-1} A_S g + g^{-1} dg, \quad g = \exp(iq\phi)$$

で与える.

(Online Math Contest—Proxima Technology 杯第7問は次ページに続く.)

(1) 基底 $d\phi$ は θ に関して特異点を持つ. その特異点を明示的に書くと,

$$d\phi = \frac{1}{\boxed{\text{ア}}} d\tilde{\phi},$$

$$d\tilde{\phi} = -ydx + xdy$$

である. ここで, $d\tilde{\phi}$ はなめらかな 1 形式である. 基底 $d\phi$ は $\boxed{\text{ア}} = 0$ の点, つまり $\theta = \boxed{\text{イ}}$, π で特異点を持つことがわかる. 一方で, 北半球でのゲージ場 A_N はこの特異点を持たず,

$$A_N = \frac{iq}{2} \frac{1}{\boxed{\text{ウ}}} d\tilde{\phi}$$

と書ける. したがって, $\theta = \boxed{\text{イ}}$ を含む定義域内で A_N がなめらかであることを確認できる.

$\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{ウ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

① $\sin \theta$	② $\sin^2 \theta$	③ $1 + \sin \theta$	④ $\sin \theta \sin \phi$
⑤ $1 + \sin^2 \phi$	⑥ $\cos \theta$	⑦ $1 + \cos \theta$	⑧ $\tan \theta$

$\boxed{\text{イ}}$ の解答群

① 0	② $\frac{\pi}{6}$	③ $\frac{\pi}{4}$	④ $\frac{\pi}{3}$
⑤ $\frac{\pi}{2}$	⑥ $\frac{2\pi}{3}$	⑦ $\frac{3\pi}{4}$	⑧ $\frac{5\pi}{6}$

(Online Math Contest—Proxima Technology 杯第 7 問は次ページに続く.)

(2) 場の強さはゲージ場①の外微分から計算でき,

$$F_N = dA_N = iq \boxed{\text{エ}}$$

となる. 同様に A_S に対する場の強さ F_S をすると上記の F_N と一致することが確かめられる. 以後, $F = F_N = F_S = iq \boxed{\text{エ}}$ とする.

$\boxed{\text{エ}}$ の選択肢

- | | | | |
|--|--|--|--|
| ① $\sin \theta d\theta \wedge d\phi$ | ② $\cos \theta d\theta \wedge d\phi$ | ③ $\tan \theta d\theta \wedge d\phi$ | ④ $\frac{1}{2} \sin \theta d\theta \wedge d\phi$ |
| ⑤ $\frac{1}{2} \cos \theta d\theta \wedge d\phi$ | ⑥ $\frac{1}{2} \tan \theta d\theta \wedge d\phi$ | ⑦ $\sin \theta \cos \theta d\theta \wedge d\phi$ | ⑧ $\sin \phi d\theta \wedge d\phi$ |
| ⑨ $\cos \phi d\theta \wedge d\phi$ | ⑩ $\tan \phi d\theta \wedge d\phi$ | | |

(Online Math Contest—Proxima Technology 杯第 7 問は次ページに続く.)

(3) Dirac 演算子 \mathcal{D} に対する Atiyah–Singer 指数 (AS 指数) $\text{index}(\mathcal{D})$ を, 次の捻じれスピノ複体に対する指数定理を用いて計算しよう.

捻じれスピノ複体に対する指数定理

M を d 次元コンパクト多様体とする. このとき,

$$\text{index}(\mathcal{D}) = \int_M \hat{A}(\mathcal{R}) \text{ch}(F) \Big|_{d\text{-form}}$$

が成り立つ. ここで, $\text{ch}(F)$ はゲージ場の強さ F に対する Chern 指標

$$\text{ch}(F) = \sum_{k=0} \text{ch}_k(F), \quad \text{ch}_k(F) = \frac{1}{k!} \text{tr} \left(\frac{i}{2\pi} F \right)^k$$

であり, トレース tr はゲージ群の Lie 代数の表現に対して和を取る. また, \mathcal{R} は Riemann 曲率 2 形式であり, $\hat{A}(\mathcal{R})$ は Riemann 曲率 2 形式 \mathcal{R} に対して定まる \hat{A} 種数 (もしくは Dirac 種数) と呼ばれる量である.

(Online Math Contest—Proxima Technology 杯第 7 問は次ページに続く.)

では, \hat{A} 種数について $M = S^2$ の具体例を交えて確認していこう.

まず初めに, S^2 の局所直交系を次のように置く:

$$ds^2 = \sum_{a=1,2} e^a \otimes e^a.$$

ここで, e^a は多脚場の 1 形式であり,

$$e^1 = d\theta, \quad e^2 = \sin \theta d\phi \tag{2}$$

と定める. このとき, スピン接続の 1 形式 ω^a_b を捩れなしの条件

$$de^a + \omega^a_b \wedge e^b = 0 \tag{3}$$

から計算する. この条件式に②を代入すると, 次の 2 つの式

$$\begin{aligned} \omega^1_2 \wedge \boxed{\text{オ}} &= 0, \\ \boxed{\text{カ}} + \omega^2_1 \wedge d\theta &= 0 \end{aligned}$$

が得られ, これらから

$$\omega^1_2 = -\omega^2_1 = \boxed{\text{キ}} \tag{4}$$

と求まる.

$\boxed{\text{オ}}$, $\boxed{\text{キ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

- | | | | | |
|-----------------------|------------------------|-------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| ① $\sin \phi d\theta$ | ② $\cos \phi d\theta$ | ③ $\tan \phi d\theta$ | ④ $\sin \theta d\phi$ | ⑤ $\cos \theta d\phi$ |
| ⑥ $\tan \theta d\phi$ | ⑦ $-\cos \theta d\phi$ | ⑧ $\sin \theta d\theta$ | ⑨ $\frac{1}{2} \sin \theta d\theta$ | ⑩ $\frac{1}{2} \cos \theta d\theta$ |

$\boxed{\text{カ}}$ の選択肢

- | | | | |
|--|--|--|--|
| ① $\sin \theta d\theta \wedge d\phi$ | ② $\cos \theta d\theta \wedge d\phi$ | ③ $\tan \theta d\theta \wedge d\phi$ | ④ $\frac{1}{2} \sin \theta d\theta \wedge d\phi$ |
| ⑤ $\frac{1}{2} \cos \theta d\theta \wedge d\phi$ | ⑥ $\frac{1}{2} \tan \theta d\theta \wedge d\phi$ | ⑦ $\sin \theta \cos \theta d\theta \wedge d\phi$ | ⑧ $\sin \phi d\theta \wedge d\phi$ |
| ⑨ $\cos \phi d\theta \wedge d\phi$ | ⑩ $\tan \phi d\theta \wedge d\phi$ | | |

(Online Math Contest—Proxima Technology 杯第 7 問は次ページに続く.)

そして, Riemann 曲率 2 形式は

$$\mathcal{R}^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b$$

で与えられることから, スピン接続④を用いて

$$\mathcal{R}^1_2 = -\mathcal{R}^2_1 = \boxed{\text{ク}}$$

と計算できる. また, \mathcal{R}^a_b を成分とした行列は反対称行列であり, その特性方程式 $\det(\lambda I - \mathcal{R}) = 0$ の形式的な根は, $x = \mathcal{R}^1_2$ とおくと, $\lambda = \pm ix$ で与えられる.

の選択肢

- | | | | |
|--|--|--|--|
| ① $\sin \theta d\theta \wedge d\phi$ | ② $\cos \theta d\theta \wedge d\phi$ | ③ $\tan \theta d\theta \wedge d\phi$ | ④ $\frac{1}{2} \sin \theta d\theta \wedge d\phi$ |
| ⑤ $\frac{1}{2} \cos \theta d\theta \wedge d\phi$ | ⑥ $\frac{1}{2} \tan \theta d\theta \wedge d\phi$ | ⑦ $\sin \theta \cos \theta d\theta \wedge d\phi$ | ⑧ $\sin \phi d\theta \wedge d\phi$ |
| ⑨ $\cos \phi d\theta \wedge d\phi$ | ⑩ $\tan \phi d\theta \wedge d\phi$ | | |

(Online Math Contest—Proxima Technology 杯第 7 問は次ページに続く.)

一般に, Riemann 曲率 2 形式 \mathcal{R} は反対称行列として与えられ, その特性方程式の根 $\pm ix_k$ (ここで k は根のラベルを L として, $k \in L$) を用いて \hat{A} 種数は

$$\hat{A}(\mathcal{R}) = \prod_{k \in L} \frac{x_k/2}{\sinh(x_k/2)}$$

と定義される. これを級数展開すると

$$\hat{A}(\mathcal{R}) = 1 - \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コサ}}} \sum_{k \in L} x_k^2 + \frac{1}{5760} \left(7 \left(\sum_{k \in L} x_k^2 \right)^2 - \boxed{\text{シ}} \sum_{\substack{k, l \in L \\ k < l}} x_k^2 x_l^2 \right) + \dots$$

となる.

$\mathcal{M} = \mathbf{S}^2$ の場合に立ち返ると結局,

$$\hat{A}(\mathcal{R}) = \boxed{\text{ス}}$$

となる.

以上の議論から, **指数定理**を用いると Dirac 演算子 \mathcal{D} に対する Atiyah–Singer 指数 $\text{index}(\mathcal{D})$ は, $\mathcal{M} = \mathbf{S}^2$ のとき,

$$\begin{aligned} \text{index}(\mathcal{D}) &= \int_{\mathbf{S}^2} \boxed{\text{セ}} \\ &= \boxed{\text{ソ}} \end{aligned}$$

と計算できる.

$\boxed{\text{セ}}$ の解答群

- | | | | | |
|--------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| ① $\text{ch}_0(F)$ | ② $4 \text{ch}_0(F)$ | ③ $\frac{1}{12} \text{ch}_0(F)$ | ④ $\frac{1}{24} \text{ch}_0(F)$ | ⑤ $\text{ch}_1(F)$ |
| ⑥ $\frac{1}{4} \text{ch}_1(F)$ | ⑦ $\frac{1}{24} \text{ch}_1(F)$ | ⑧ $-\text{ch}_2(F)$ | ⑨ $\frac{1}{12} \text{ch}_2(F)$ | ⑩ $\frac{1}{24} \text{ch}_2(F)$ |

$\boxed{\text{ソ}}$ の解答群

- | | | | | |
|----------|--------|---------|------------------|-------------------|
| ① q | ② $-q$ | ③ iq | ④ $-iq$ | ⑤ q^2 |
| ⑥ $-q^2$ | ⑦ $2q$ | ⑧ $-2q$ | ⑨ $\frac{1}{2}q$ | ⑩ $-\frac{1}{2}q$ |

第8問 (配点 50)

図1のように、なめらかな水平面上に質量 $M (> 0)$ の物体にダンパの減衰係数が $D (> 0)$ のダンパとばね定数が $K (> 0)$ のばねが取り付けられている。つり合いの位置からの変位を $y(t)$ 、物体に加える力を $f(t)$ とする。ただし、ダンパとばねの質量は無視できるものとする。

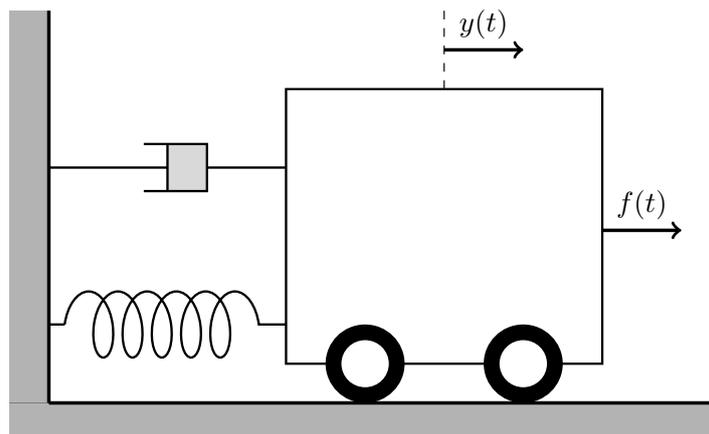


図 1

このような系をマス-ばね-ダンパ系と呼び、この系の運動方程式は

$$M\ddot{y}(t) + D\dot{y}(t) + Ky(t) = f(t) \quad \textcircled{1}$$

と表される。マス-ばね-ダンパ系は、自動車のサスペンションシステムや、ビルの耐震設計など幅広く応用されており、物体が動いた時にいかにしてその動きを制御し、素早く安定な状態に戻すかが重要な課題である。ここでは物体に加える力 $f(t)$ を入力 $u(t)$ とし、物体の変位 $y(t)$ を出力として、この物体を制御、すなわち、力を適切に加えることで素早く静止した状態にすることを考える。

ここで、 $x_1(t) = y(t)$ 、 $x_2(t) = \dot{y}(t)$ とおき、状態ベクトルを $\mathbf{x}(t) = {}^t \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix}$ とすると、式①の微分方程式は

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{D}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u(t)$$

と表されることとなる。そこで、

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{D}{M} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}$$

とおく。そして入力 $u(t)$ は $u(t) = - \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix} {}^t \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix} =: -F\mathbf{x}(t)$ という形で与えられるものとする。

(Online Math Contest—Proxima Technology 杯第8問は次ページに続く.)

ではマス-ばね-ダンパ系について数学的に考察をしていく。(この問題の背景については 55 ページ以降に記載してある.)

この問題で用いる行列はすべて実行列である. 実正方行列 X が安定であるということを, X の全ての固有値の実部が負であることと定義する. また, この問題では次の **Lyapunov の定理**を用いる.

Lyapunov の定理

A を安定な行列とする. このとき, 次が成り立つ.

1. 任意の半正定値対称行列 Q に対して, 次の方程式を満たす正方行列 P がただ一つ存在する:

$${}^tAP + PA + Q = O.$$

また, その解 P は半正定値対称行列となる.

2. 特に, 1 の Q が正定値対称行列であるとき, 解 P は正定値対称行列となる.

以下では, 行列 A, B を前頁で与えたものとし, 実数を成分とする 1×2 行列 F のうち, $A - BF$ が安定となるようなものを考える. このような条件を満たす F の集合は空集合ではなく, 実数を成分とする 1×2 行列全体の空間での (自然な位相についての) 開集合になっていることは認めることとする.

$A - BF$ が安定であるとき, 任意の 2×2 正定値対称行列 Q と 1×1 正定値対称行列 R に対して, 広義積分

$$\int_0^{\infty} e^{(A-BF)\tau} (Q + {}^tFRF) e^{(A-BF)\tau} d\tau$$

が収束することがわかるので,

$$P = \int_0^{\infty} e^{(A-BF)\tau} (Q + {}^tFRF) e^{(A-BF)\tau} d\tau \quad (2)$$

とする. このとき, P は F の取り方によらず, 常に正定値対称行列であることに注意する.

これから P の Frobenius ノルムの二乗

$$\|P\|_{\text{Frob}}^2 (= \text{Tr}({}^tPP) = \text{Tr}(P^2))$$

が最小になるような P と, そのような P を与える F を考えていく.

(Online Math Contest—Proxima Technology 杯第 8 問は次ページに続く.)

まず, $Q + {}^tFRF$ が正定値対称行列であることに注意して, P と F に関する別の関係式を得ることを考えると, 式②と

$$\boxed{\text{ア}} = 0$$

が同値であることが **Lyapunov の定理** から従う.

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

- ① ${}^tAP + PA + Q + {}^tFRF$
- ② ${}^t(BF)P + P(BF) + Q + {}^tFRF$
- ③ ${}^t(A - BF)P + P(A - BF) + Q + {}^tFRF$
- ④ ${}^t(Q + {}^tFRF)P + P(Q + {}^tFRF) + A - BF$

そこで P, F に関する必要条件として, $\boxed{\text{ア}} = 0$ を満たす P と F で, P の Frobenius ノルムの二乗が最小になる条件を考える. つまり, 次の制約条件付き最小化問題を考える:

$$\begin{aligned} \min_{P, F} \text{Tr}(P^2) \\ \text{s.t. } \boxed{\text{ア}} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

この制約条件付き最小化問題③を Lagrange の未定乗数法で解くことを考える. まずは P を $\boxed{\text{ア}} = 0$ を満たす任意の実行列とし, 未定乗数行列として 2×2 実行列 Λ をとると, Lagrange 関数 $\mathcal{L}(P, F, \Lambda)$ は,

$$\mathcal{L}(P, F, \Lambda) = \text{Tr}(P^2) + \text{Tr}\left(\Lambda \left(\boxed{\text{ア}}\right)\right)$$

と表すことができる. ここで, $m \times n$ 行列 $X = [x_{i,j}]_{i,j}$ に対して,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{11}} & \cdots & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{m1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{1n}} & \cdots & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{mn}} \end{bmatrix}$$

という記号を用意する (通常の行列の成分の転置となっていることに注意) と, 制約条件付き最小化問題③の最小値を取りうる候補は,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Lambda} = 0$$

を満たす (P, F) である.

(Online Math Contest—Proxima Technology 杯第 8 問は次ページに続く.)

それぞれについて計算をすると,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P} &= \boxed{\text{イ}}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F} &= \boxed{\text{ウ}}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Lambda} &= \boxed{\text{エ}}\end{aligned}$$

となる.

$\boxed{\text{イ}}$ ~ $\boxed{\text{エ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

- | | |
|---|---|
| ① $\Lambda^t(A - BF) + (A - BF)\Lambda + Q + {}^tFRF$ | ① $-F({}^t\Lambda^tP + \Lambda P)$ |
| ② $\Lambda(-PB + {}^tFR) + {}^t\Lambda(-{}^tPB + {}^tFR)$ | ③ ${}^tAP + PA - PBR^{-1}{}^tBP + Q$ |
| ④ $\Lambda^t(A - BF) + (A - BF)\Lambda$ | ⑤ $2(-PB + {}^tFR)$ |
| ⑥ $2P + {}^t(A - BF) + (A - BF)$ | ⑦ ${}^t(A - BF)P + P(A - BF)$ |
| ⑧ $2P + \Lambda^t(A - BF) + (A - BF)\Lambda$ | ⑨ ${}^t(A - BF)P + P(A - BF) + Q + {}^tFRF$ |

$\boxed{\text{イ}} = O$ という条件について, 最小化問題③では P は正定値対称行列であったことと, $A - BF$ は安定となるように F を取っていることから, **Lyapunov の定理** より, Λ が正定値対称行列であることが導かれる. Λ が正定値対称行列であるとき, 特には正則行列であるので, P が正定値対称行列であることと $\boxed{\text{ウ}} = O$ より,

$$\boxed{\text{オ}} = O$$

を得る. また, $\boxed{\text{オ}} = O$ と, $\boxed{\text{エ}} = O$ より,

$$\boxed{\text{カ}} = O$$

となることがわかる.

$\boxed{\text{オ}}$, $\boxed{\text{カ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

- | | |
|---|--|
| ① FP | ① $2P + \Lambda^t(A - BF) + (A - BF)\Lambda$ |
| ② ${}^tAP + PA + PBR^{-1}{}^tBP + Q$ | ③ ${}^tAP + PA - PBR^{-1}{}^tBP + Q$ |
| ④ $\Lambda^t(A - BF) + (A - BF)\Lambda$ | ⑤ ${}^t(A - BF) + (A - BF)$ |
| ⑥ ${}^tAP + PA + Q + {}^tFRF$ | ⑦ $Q + {}^tFRF$ |
| ⑧ $-PB + {}^tFR$ | ⑨ ${}^t(A - BF)P + P(A - BF) + Q + {}^tFRF$ |

(Online Math Contest—Proxima Technology 杯第 8 問は次ページに続く.)

ではここで、冒頭のマス-ばね-ダンパ系において、 $M = 2$, $D = 2$, $K = 1/2$ のとき、つまり、

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

であるときについて考える。正定値対称行列 Q , R をそれぞれ、

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad R = [1]$$

と与えたとき、 $\boxed{\text{カ}} = 0$ という方程式の解のうち、正定値対称行列となる P は

$$P = \begin{bmatrix} \boxed{\text{キ}} & \boxed{\text{ク}} \\ \boxed{\text{ク}} & \boxed{\text{ケ}} \end{bmatrix}$$

である。このとき、 F , Λ はそれぞれ、

$$F = \begin{bmatrix} \boxed{\text{コ}} & \boxed{\text{シ}} \\ \boxed{\text{サ}} & \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \boxed{\text{スセ}} & -\boxed{\text{タ}} \\ \boxed{\text{ソ}} & \boxed{\text{チツ}} \\ -\boxed{\text{タ}} & \boxed{\text{テ}} \end{bmatrix}$$

である。

$$F = \begin{bmatrix} \boxed{\text{コ}} & \boxed{\text{シ}} \\ \boxed{\text{サ}} & \end{bmatrix}$$

であるとき、 $A - BF$ の固有値は、実部が大きいほうから、

$$\frac{1}{2} \left(-\boxed{\text{ト}} + \sqrt{\boxed{\text{ナ}}} \right), \quad \frac{1}{2} \left(-\boxed{\text{ト}} - \sqrt{\boxed{\text{ナ}}} \right)$$

であるので、たしかに $A - BF$ は安定の行列であることがわかる。

(Online Math Contest—Proxima Technology 杯第 8 問は次ページに続く.)

最後に, ここで得た

$$P = \begin{bmatrix} \boxed{\text{キ}} & \boxed{\text{ク}} \\ \boxed{\text{ク}} & \boxed{\text{ケ}} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \boxed{\text{コ}} & \boxed{\text{シ}} \\ \boxed{\text{サ}} & \end{bmatrix}$$

が最小化問題③の最小値を与えることを確認する.

$A - BF$ が安定となるような F の集合が開集合であったので, 上で与えた F の十分に近い近傍から任意の 1×2 行列 $F + \Delta F$ を取ってくると, $A - B(F + \Delta F)$ もまた安定となる. そこで, $F + \Delta F$ に対して式②により定まる正定値対称行列を, 上で与えた P を用いて $P + \Delta P$ とすると, $\boxed{\text{ア}} = 0$ と, $\boxed{\text{オ}} = 0$ より,

$$\boxed{\text{ニ}} = 0$$

であることがわかる.

$\boxed{\text{ニ}}$ の解答群

- | |
|---|
| <p>① ${}^t(A - B(F + \Delta F))\Delta P + \Delta P(A - B(F + \Delta F)) + {}^t(F + \Delta F)R(F + \Delta F)$</p> <p>② ${}^t(A - BF)\Delta P + \Delta P(A - BF) + {}^t(\Delta F)R\Delta F$</p> <p>③ ${}^t(A - B(F + \Delta F))\Delta P + \Delta P(A - B(F + \Delta F)) + {}^t(\Delta F)R\Delta F$</p> <p>④ ${}^t(A - B\Delta F)\Delta P + \Delta P(A - B\Delta F) + {}^t(\Delta F)R\Delta F$</p> |
|---|

ここで **Lyapunov の定理** を用いることで, ΔP が常に半正定値対称行列であることが従い, $P + \Delta P \geq P$ となるので,

$$\text{Tr}((P + \Delta P)^2) \geq \text{Tr}(P^2)$$

となる. (一般に, 半正定値対称行列 A, B が $A \geq B$ を満たすならば, $\text{Tr}(A^2) \geq \text{Tr}(B^2)$ となることを用いた.) したがって,

$$P = \begin{bmatrix} \boxed{\text{キ}} & \boxed{\text{ク}} \\ \boxed{\text{ク}} & \boxed{\text{ケ}} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \boxed{\text{コ}} & \boxed{\text{シ}} \\ \boxed{\text{サ}} & \end{bmatrix}$$

は最小化問題③の最小値を与えることがわかった.

第 8 問は以上となる. 次頁からは問題の背景に関する説明が記述されている.

(Online Math Contest—Proxima Technology 杯第 8 問は次ページに続く.)

問題の背景の解説

この問題では、物理系の一例として、ばねとダンパ (減衰装置) を組み合わせたシステム、いわゆるマス-ばね-ダンパ系を扱いました。このシステムは、自動車のサスペンションシステムやビルの耐震設計など、私たちの日常生活に幅広く応用されています。このシステムにおいて最も重要な課題は、物体が振動している場合などに、その動きをどのように制御し、素早く静止させられるかという点です。マス-ばね-ダンパ系の動きを適切に制御するためには、システムへの入力、すなわち、物体に加える力をどのように決定するかを考える必要があります。

システムに望み通りの動きをさせる、あるいは動き方に関して最適な設計を行う分野として「制御理論」があります。本問題では、制御理論の中で知られている一手法である「線形フィードバック制御」と呼ばれる手法に関する最適化問題を考えました。この手法では、システムが過度に振動しないように調整しながら、目標の位置に素早く到達させることを目指します。

一般的に「制御理論」では、制御を行うシステムが $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$ の形で記述されているとします。そしてシステムへの入力 $\mathbf{u}(t)$ をシステムの現在の状態を表すベクトル $\mathbf{x}(t)$ に基づいて計算し、システムの挙動を最適化することを考えます。このような制御の手法をフィードバック制御と呼びます。冒頭に挙げた「線形フィードバック制御」とは、入力 $\mathbf{u}(t)$ がシステムの状態ベクトルに対して線形の形で与えられるものを指します。具体的には、適切なフィードバックゲイン行列 F を用いて、

$$\mathbf{u}(t) = -F\mathbf{x}(t)$$

で入力 $\mathbf{u}(t)$ が与えられるものです。ここでの課題として、この F をどのように決定するかということが挙げられます。

一般に、良いフィードバックゲイン F とは、システムが素早くかつ効率的に目標状態に到達することで、振動や過剰なエネルギー消費を抑えるものです。このような最適なフィードバックゲインを求めるためには、システム全体の挙動を評価する目的関数を定義し、その目的関数が最小になるような F を見つけることが必要です。

目的関数についてはシステムの状態 $\mathbf{x}(t)$ や入力 $\mathbf{u}(t)$ に関わるコストを評価するために、

$$J = \int_0^{\infty} ({}^t\mathbf{x}(\tau)Q\mathbf{x}(\tau) + {}^t\mathbf{u}(\tau)R\mathbf{u}(\tau)) d\tau \quad \textcircled{4}$$

を考えます。この積分は、システムの状態 $\mathbf{x}(t)$ に関するコスト (Q 行列で重み付け) と、入力 $\mathbf{u}(t)$ に関するコスト (R 行列で重み付け) の無限時間にわたっての総和を考えています。したがって、この積分の値が小さいほど、システムが効率的に制御されているとみなすことができます。

(Online Math Contest—Proxima Technology 杯第 8 問は次ページに続く。)

一般には目的関数④を直接計算し、目的関数の最小値を求めることは困難です。しかし、線形フィードバック制御を考えるとときには式変形を行うことで、計算を楽に行うことができます。

まずはシステムが次の形の線形システムで表されている状況を考えます：

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t).$$

(すべてのシステムを線形システムとして考えることはできないですが、本問題で扱ったマス-ばね-ダンパ系をはじめとして、この線形システムで考えられるシステムは数多くあります。) ここで、 A はシステム行列、 B は入力行列と呼ばれます。線形フィードバック制御の式 $\mathbf{u}(t) = -F\mathbf{x}(t)$ を代入すると、この線形システムは

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (A - BF)\mathbf{x}(t)$$

と表されます。この微分方程式の解は

$$\mathbf{x}(t) = e^{(A-BF)t}\mathbf{x}(0)$$

となるので、線形フィードバック制御を考えるとときには、先ほどの目的関数④は

$${}^t\mathbf{x}(0) \left(\int_0^\infty e^{(A-BF)\tau} (Q + {}^tF R F) e^{(A-BF)\tau} d\tau \right) \mathbf{x}(0)$$

と書き直すことができます。

初期値 $\mathbf{x}(0)$ にかかわらず目的関数を小さくするために、

$$\int_0^\infty e^{(A-BF)\tau} (Q + {}^tF R F) e^{(A-BF)\tau} d\tau$$

を小さくするような F を求めることが、最適な線形フィードバック制御の設計における目標となります。本問題では、この行列を

$$P = \int_0^\infty e^{(A-BF)\tau} (Q + {}^tF R F) e^{(A-BF)\tau} d\tau$$

としました。そしてこの P が小さいことを、Frobenius ノルムの 2 乗 $\|P\|_{\text{Frob}}^2$ が小さくなることとして最小化問題を解くことにより、マス-ばね-ダンパ系において最適な線形フィードバック制御を行うためのフィードバックゲイン F を求めたのでした。

線形フィードバック制御は本問題で扱ったマス-ばね-ダンパ系に限らず、多様な物理システムや工学的プロセスに適用可能です。例えば、ロボットの動作制御、化学プラントの温度管理、航空機の姿勢制御など、幅広い分野で活用されています。また、制御理論には線形フィードバック制御以外にも PID 制御やモデル予測制御 (MPC) など、対象や目的に合わせて様々な手法があります。制御理論は、複雑なシステムの挙動を最適化し、効率的かつ安定した運用を実現するための強力な枠組みです。その応用範囲の広さと有効性から、制御理論は現代の科学技術や産業において不可欠な役割を果たしているのです。