2025 年度
共通テスト風模試
数学 IV・D

— 京都大学作問サークル・Proxima Technology 杯 —

9 月 1 日 19:00 – 9 月 6 日 21:00

京 大 saKUmon 作 問

I 注意事項

1 **提出ボタンより提出が行われないと採点されません．**また, 制限時間の終了とともに提出は締め切られます．(終了時に入力してある部分についても提出されないと採点されませんので, 必ず制限時間内に提出ボタンを押すようにしてください.)

2 再提出は何度でも可能です．再提出が行われた際は, 一番最後に提出されたものが採点されます.

3 問題番号, ページ及び採点方法については, 下表のとおりです.

問題	ページ	採点方法
第 1 問	5〜13	左の 4 問のすべてが採点され, その合計を点数とします.
第 2 問	14〜21	
第 3 問	22〜29	
第 4 問	30〜38	

4 **不正行為について**

① 不正行為に対しては厳正に対処します.

② 複数人で問題を解くことを禁止します．誰かと相談する, SNS 等で質問するなどはすべて不正行為とみなされます.

③ 試験終了までは問題, 自身の解答, その他問題の内容に関することを他人に見せること (SNS に載せることも含む) を禁止します．また問題の PDF の取り扱いについては公式 HP を確認してください.

④ 問題の解答作成に生成 AI 等のプログラムを活用することを禁止します.

⑤ 不正行為を行った場合は, 公式 HP に記載されている措置をとる場合があります.

5 その他の本コンテストに関する注意事項については公式 HP より確認してください.

6 **本コンテストは，本編の「2025 年度 OnlineMathContest – Proxima Technology 杯」の予選解答ページを体験していただくコラボ企画です．**ぜひ, 本編のコンテストもお楽しみください．（公式トップページ：`https://math-contest.proxima-ai-tech.com/`）

7「数学 IV・D」の問題は, 京都大学作問サークルにより作成されています．コンテスト本編の「OnlineMathContest – Proxima Technology 杯」の問題は，Proxima Technology 様により作成されています．それぞれのコンテストは別団体によるものであり，関係はございません.

8「数学 IV・D」, 及び「OnlineMathContest – Proxima Technology 杯」のプラットフォームは, Proxima Technology 様により制作されています.

II　解答上の注意

1 解答は，解答用紙の問題番号に対応した解答欄にチェックを入れなさい．

2 問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ などには，数字 (0 〜 9)，又はマイナス記号 (−) が入ります．**ア**，**イ**，**ウ**，... の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応します．
それらを解答用紙の**ア**，**イ**，**ウ**，... で示された解答欄にチェックを入れて答えなさい．

例 $\boxed{\text{アイウ}}$ に 496 と答えたいとき

ア	−	0	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9
イ	−	0	1	2	3	4	5	6	7	8	**9**
ウ	−	0	1	2	3	4	5	**6**	7	8	9

3 分数形で解答する場合，分数の符号は分子につけ，分母につけてはいけません．また，それ以上約分できない形で答えなさい．
例えば，$\dfrac{3}{4}$ と答えるところを，$\dfrac{6}{8}$ のように答えてはいけません．

4 根号を含む形で解答する場合，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい．
例えば，$4\sqrt{2}$，$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ と答えるところを，$2\sqrt{8}$，$\dfrac{\sqrt{52}}{4}$ のように答えてはいけません．

5 問題の文中の二重四角で表記された $\boxed{\boxed{\text{エ}}}$ などには，選択肢から一つを選んで答えなさい．

6 同一の問題文中に $\boxed{\text{オカ}}$，$\boxed{\boxed{\text{キ}}}$ などが 2 度以上現れる場合，原則として，2 度目以降は，$\boxed{\text{オカ}}$，$\boxed{\boxed{\text{キ}}}$ のように細字で表記します．

7 $\boxed{\text{ク}}\,a$ の**ク**に 0 や 1 が入る場合は，$0a$ は 0 を，$1a$ は a を表します．
同様に，$\boxed{\boxed{\text{ケ}}}\,b$ の**ケ**の選択肢の指す項に 0 や 1 が入る場合は，$0b$ は 0 を，$1b$ は b を表します．

8 0 以上の実数 x に対して，$x^{\boxed{\text{コ}}}$ の**コ**に 0 や 1 が入る場合は，それぞれ x^0 は 1 を，x^1 は x を表します．
同様に，0 以上の実数 y に対して，$y^{\boxed{\boxed{\text{サ}}}}$ の**サ**の選択肢の指す項に 0 や 1 が入る場合は，それぞれ y^0 は 1 を，y^1 は y を表します．

2025年度
共通テスト風模試
数学 IV・D

— 京都大学作問サークル・Proxima Technology 杯 —

問　題	選　択　方　法
第1問	必　　答
第2問	必　　答
第3問	必　　答
第4問	必　　答

Writer：Lim_Rim_　たつきぃ　とろぴりうむ　kzy33550336　ipha　U.N.Owen

第 1 問　(必答問題)　(配点　50)

太郎さんと花子さんは京都大学の新入生である．入学式も終わり，授業が本格的に始まる前のこの時期，二人はどのサークルに入ろうかと，新緑がまぶしい吉田キャンパスを歩きながら話していた．運動系も文化系も魅力的で，なかなか一つに決めきれない．

そんなとき，ふと目に留まったのは，ある掲示板に貼られたビラだった．

花子: ねえ，**京都大学作問サークル**って知ってる？
太郎: 知ってる！数学とか理科とか，いろんな問題を作るサークルなんだってね．受験生のとき，学園祭で販売している問題集やオリジナル京大模試も見たことがあるよ．
花子: そうそう！しかも高校数学だけじゃなくて，数学オリンピックっぽい問題や大学数学だったり，理科の作問もしてるんだって．
太郎: しかもこのビラ，数学のコンテストの開催が告知されているね！一緒に出てみない？
花子: いいね！負けないよ！

世界初の「作問サークル」：京都大学作問サークル

京都大学作問サークルは，2018 年に創立された，世界初の「作問」に特化した大学サークルです．元々は高校数学の作問からスタートしましたが，現在では競技数学寄りの問題，大学数学の問題，理科分野の問題など，幅広い作問活動を行っています．また，京都大学の入試問題を研究し，それをもとにした京大模試の作成にも取り組んでいます．学園祭への出展や，企業様とのコラボレーションなども積極的に行っており，作問の魅力や学問の面白さが社会に広がっていくことを願って活動しています．

活動の詳細は，公式ウェブサイトをご覧ください：

https://sakumoncircle.notion.site/?v=2f7cccbe9bf74839bd4c19fc678f686b

(**数学 IV・D —京大作問サークル・Proxima Technology 杯— 第 1 問は次ページに続く．**)

(1) 後日，コンテストを受けた太郎さんと花子さんは，出題された次の**問題 A.** について話し合った.

問題 A. (作問: ipha)

n を正の整数とします．A, B, C の文字をいくつか並べて得られる長さ n の文字列であって，以下の条件を満たすものの個数を a_n とします．a_{2019} を素数 2017 で割った余りを解答してください.

- その文字列の連続する 3 文字であって「1 文字目と 3 文字目が一致し，かつ 1 文字目と 2 文字目が異なるようなもの」が**存在しない**.

ただし，使わない文字があってもよいとし，$n \leqq 2$ のときは条件は常に成立するものとします.

花子: ipha さんの**問題 A.** どうやって解いた？
太郎: 僕は漸化式を立てたよ．条件を満たす文字列の中で，後ろ 2 文字が同じものの個数を b_n として，後ろ 2 つが異なるものの個数を c_n と置いたら連立漸化式が作れたよ.
花子: $a_n = b_n + c_n$ ってことだよね．そう解けばよかったんだ.
太郎: 花子さんは一体どうやって解いたの？即答してなかった $\cdots$ ？
花子: え，これ a_3 と同じじゃない？
太郎: そうなの！？あ，本当だ $\cdots$．なんで a_3 なの？

問題 A. の a_n について，$a_3 = \boxed{\text{アイ}}$ である．次に，太郎さんの場合分けを考えることによって，$b_{n+1}, c_{n+1}, b_n, c_n$ の間には，以下の関係式がある.

$$\begin{cases} b_{n+1} = \boxed{\text{ウ}}\, b_n + \boxed{\text{エ}}\, c_n, \\ c_{n+1} = \boxed{\text{オ}}\, b_n + \boxed{\text{カ}}\, c_n. \end{cases}$$

以上より，すべての整数 $n \geqq 1$ に対して

$$a_{n+2} = \boxed{\text{キ}}\, a_{n+1} + \boxed{\text{ク}}\, a_n$$

が成り立つことがわかる.

二次方程式 $x^2 - \boxed{\text{キ}}\, x - \boxed{\text{ク}} = 0$ の解は

$$\alpha = \boxed{\text{ケ}} + \sqrt{\boxed{\text{コ}}}, \quad \beta = \boxed{\text{ケ}} - \sqrt{\boxed{\text{コ}}}$$

である．よって，a_n は以下で与えられる:

$$a_n = \frac{1}{\boxed{\text{サ}}} \left(\boxed{\text{シ}}\, \alpha^n + \boxed{\text{ス}}\, \beta^n \right).$$

ただし，$\boxed{\text{サ}}$ と $\boxed{\text{シ}}$，および $\boxed{\text{サ}}$ と $\boxed{\text{ス}}$ は互いに素である.

(**数学 IV・D —京大作問サークル・Proxima Technology 杯— 第 1 問は次ページに続く.**)

a_n を素数 $p = 167$ で割った余りについて考える．このとき，

- 合同方程式 $\boxed{\text{サ}} \cdot x \equiv 1 \pmod{p}$ の p 以下の正の整数解は $x = \boxed{\textbf{セソ}}$ である．
- 合同方程式 $x^2 \equiv \boxed{\text{コ}} \pmod{p}$ の $p/2$ 以下の正の整数解は $x = \boxed{\textbf{タチ}}$ である．

よって，すべての正の整数 n について，次が成り立つ:

$$a_n \equiv \boxed{\textbf{ツテ}}\left(\boxed{\text{ケ}} + \boxed{\text{タチ}}\right)^n + \boxed{\textbf{トナ}}\left(\boxed{\text{ケ}} - \boxed{\text{タチ}}\right)^n \pmod{p}.$$

このように，$a_n \bmod p$ を整数の n 乗を用いて表すことができる場合は，

$$a_{n+p-1} \equiv a_n \pmod{p} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

が，Fermat の小定理から直ちに導かれる．$p = 2017$ の場合にも，ある整数 x が存在して $x^2 \equiv 2 \pmod{p}$ を満たすことが知られている．よって，$a_3 \equiv a_{2019} \pmod{2017}$ が正しいことがわかる．

太郎: 漸化式で解けると踏んで，一般項の形を予想して周期を見抜く $\cdots$ ってコト！？
花子: そういうこと！

(**数学 IV・D —京大作問サークル・Proxima Technology 杯— 第 1 問は次ページに続く．**)

(2) 太郎さんと花子さんは，**問題 A.** をきっかけに，次の**予想 B.** について議論することにした．

予想 B.

A, B を整数とする．整数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がすべての正の整数 n に対して

$$x_{n+2} = Ax_{n+1} + Bx_n \quad (n \geqq 1)$$

を満たすと仮定する．p を素数として，x_n を p で割った余りを r_n とおく．このとき，数列 $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の周期は $p-1$ を割り切る．

ただし，数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の**周期**とは，以下の条件を満たす最小の正の整数 d のことであるとする．

- ある正の整数 N が存在して，すべての正の整数 $n \geqq N$ に対して $x_n = x_{n+d}$ が成り立つ．

太郎: **予想 B.** は正しくないね．たとえば，フィボナッチ数列

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad (n \geqq 1), \quad F_1 = 1, \quad F_2 = 2$$

について, F_n を 3 で割った余りを r_n とすると, 数列 $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の周期は $\boxed{\text{ニ}}$ だね．

花子: 本当だ．$\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ も $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ も 3 項間漸化式から定まるのに，なぜだろう？

太郎: $x^2 \equiv \boxed{\text{コ}}$ (mod 167) の解は存在するけれど，$x^2 \equiv 5$ (mod 3) の解は存在しないから，整数の累乗に書き直せないね．これってどうすればいいんだろう．

花子: あ……！ ちょっと代数学の本借りに行かない？

太郎: えっ？

(**数学 IV・D —京大作問サークル・Proxima Technology 杯— 第 1 問は次ページに続く．**)

数学 IV・D —京都大学作問サークル・Proxima Technology 杯—

大学以降の代数学で学習する有限体の理論を用いて，**予想 B.** の改良について論じよう．まずは，複素数の集合 $\mathbb{C}$ の部分集合と，それらに備わる演算構造について考えてみよう．

2 つの複素数 z, w の通常の四則演算に関する和，積を取る 2 変数関数をそれぞれ

$$a : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}; \quad a(z, w) = z + w$$
$$m : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}; \quad m(z, w) = z \cdot w$$

で表す．また，以下で定義される $\mathbb{C}$ の部分集合 X_1，X_2，...，X_7，X_8 を考える．

$\mathbb{C}$ の部分集合 X_i

- $X_1 := \mathbb{Q}$ (有理数全体の集合).
- $X_2 := \mathbb{Z}$ (整数全体の集合).
- $X_3 := \mathbb{R}_{\geqq 0}$ (0 以上の実数全体の集合).
- $X_4 := \{z \mid z = 0$ または $|z| = 1\}$.
- $X_5 := \{z \mid z$ は超越数，または有理数である $\}$.
- $X_6 := \{a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.
- $X_7 := \{a_0 + a_1\omega + \cdots + a_n\omega^n \mid n \geqq 0,\ a_i \in \mathbb{Q}\}$．ただし，$\omega := \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ とする．
- $X_8 := \{a_0 + a_1\pi + \cdots + a_n\pi^n \mid n \geqq 0,\ a_i \in \mathbb{Q}\}$.

ただし，複素数 t が**超越数**であるとは，零でない任意の有理数係数多項式 $P(X)$ に対して $P(t) \neq 0$ を満たすことをいう．また，円周率 π は超越数であることが知られている．

「すべての X_i の要素 s_1, s_2 に対して $a(s_1, s_2)$ と $m(s_1, s_2)$ が常に X_i に属す」という条件を満たす 1 以上 8 以下の整数 i はちょうど $\boxed{\text{ヌ}}$ 個だけ存在する．これら $\boxed{\text{ヌ}}$ 個の整数 i のなかで，更に以下の 2 条件 (a), (b) を両方とも満たすもの全てに関して整数 2^i を足し上げると $\boxed{\text{ネノハ}}$ となる．なお，各 X_i は $0, 1$ を要素として含むことに注意せよ．

(a) 任意の $x \in X_i$ に対して，ある $y \in X_i$ が存在して $a(x, y) = 0$ を満たす．
(b) 任意の $x \in X_i$ で $x \neq 0$ であるものに対して，ある $y \in X_i$ が存在して $m(x, y) = 1$ を満たす．

(数学 IV・D —京大作問サークル・Proxima Technology 杯— 第 1 問は次ページに続く．)

次に，(a), (b) を満たす X_i と類似した演算構造を持つ有限集合について考えてみよう．

p は 3 以上の素数とする．x を変数とする整数係数の多項式全体からなる集合を $\mathbb{Z}[x]$ とし，部分集合 $L \subset \mathbb{Z}[x]$ を

$$L := \{ax + b \mid a, b \text{ は } 0 \text{ 以上 } p \text{ 未満の整数 }\}$$

によって定める．また，$A(x), B(x) \in \mathbb{Z}[x]$ に対して，ある $C(x), D(x) \in \mathbb{Z}[x]$ が存在して

$$A(x) - B(x) = pC(x) + (x^2 - t)D(x)$$

を満たすとき，$A(x) \equiv B(x) \pmod{p, x^2 - t}$ と表す．

次に，集合 L 上の関数 a_L, m_L を定義する．まず，以下の条件 (Q) を満たす任意の整数 t を考える．

(Q) :　　任意の整数 s に対して，$s^2 - t$ は p の倍数ではない．

たとえば，$t = 2, 5$ がいずれも 条件 (Q) を満たす 3 以上 100 以下の素数 p の総和は $\boxed{\text{ヒフヘ}}$ である．

すべての $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ に対し，ある $ax + b \in L$ が一意に存在して

$$ax + b \equiv P(x) \pmod{p, x^2 - t}$$

を満たすことが分かる．実際，$ax + b$ は $\boxed{\text{ホ}}$ に等しい．

そこで，$f_{p^2}(P(x)) := ax + b$ によって関数 $f_{p^2} : \mathbb{Z}[x] \to L$ を構成する．ただし $Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ に対して，$Q(x)$ の各係数を p で割った余り (0 以上 p 未満の整数) に置き換えて得られる整数係数多項式を $\phi(Q(x))$ で表す．

$\boxed{\text{ホ}}$ の選択肢

⓪ $P(x)$ を $x^2 - t$ で割った余りを $cx + d$ とおいたときの $\phi(cx + d)$

① $P(x)$ を $\phi(x^2 - t)$ で割った余りを $cx + d$

② $\phi(P(x))$ を $x^2 - t$ で割った余り $cx + d$

(数学 IV・D —京大作問サークル・Proxima Technology 杯— 第 1 問は次ページに続く．)

$P(x), Q(x) \in L$ に対し，関数 $a_L, m_L : L \times L \to L$ を

$$a_L(P(x), Q(x)) = f_{p^2}(P(x) + Q(x)), \qquad m_L(P(x), Q(x)) = f_{p^2}(P(x) \cdot Q(x))$$

によって定める．ただし，右辺の $+, \cdot$ は多項式としての和と積を表す ($\mathbb{Z}[x]$ 上の) 演算である．以後，$a_L(P(x), Q(x))$，$m_L(P(x), Q(x))$ をそれぞれ

$$P(x) +_L Q(x), \quad P(x) \times_L Q(x)$$

と表す．このとき，次が成り立つことが確認できる．

条件

すべての $P, Q, R \in L$ に対して，以下がすべて成立する:

(F-1) $P +_L Q = Q +_L P$.

(F-2) $(P +_L Q) +_L R = P +_L (Q +_L R)$.

(F-3) 任意の $P \in L$ に対し，$P +_L 0 = P$ を満たす.

(F-4) 任意の $P \in L$ に対し，ある $P' \in S$ が存在して $P +_L P' = 0$ を満たす.

(F-5) $P \times_L Q = Q \times_L P$.

(F-6) $(P \times_L Q) \times_L R = P \times_L (Q \times_L R)$.

(F-7) $P \times_L (Q +_L R) = (P \times_L Q) +_L (P \times_L R)$, $(P +_L Q) \times_L R = (P \times_L R) +_L (Q \times_L R)$.

(F-8) 任意の $P \in L$ に対して $P \times_L 1 = P$ を満たす.

(F-9) 任意の 0 と異なる $P \in L$ に対し，ある $P' \in L$ が存在して $P \times_L P' = 1$ を満たす.

実際に (F-9) を具体例で確認してみよう．$(p, t) = (101, 2)$ とする．条件 (Q) より，$ax+b \in L \setminus \{0\}$ に対して

$$(ax + b) \times_L (ax - b) = \phi(a^2 t - b^2) \neq 0$$

であるから，

$$(100x + 3) \times_L \left(\boxed{\text{マミ}}\, x + \boxed{\text{ムメ}} \right) = 1$$

を得る．同様に，一般の $ax + b \in L \setminus \{0\}$ に対しても，$(ax + b) \times_L (cx + d) = 1$ を満たす $cx + d \in L$ が存在する．

(数学 IV・D —京大作問サークル・Proxima Technology 杯— 第 1 問は次ページに続く．)

(3) 太郎さんと花子さんは，あのコンテスト以来，ほとんど毎日のように議論を重ねてきた．
そしてついに——

太郎: $0 \leqq t < p$ で取れば $x \times_L x = f_{p^2}(x^2) = t$ だから「x の 2 乗」は t だね．つまり，$\sqrt{t}$ みたいなものが L に存在していると考えることができるんじゃないかな？

花子: これであの裏技をさらに研究できそう！

太郎: すべての $ax+b \in L$ に対して

$$(ax+b)^p \equiv \boxed{\text{モ}} \pmod{p, x^2 - t}$$

だから，ここから**結果 C.** がわかるね！フェルマーの小定理の一つの拡張ができたよ！

結果 C.

すべての $ax+b \in L$ に対して

$$\underbrace{(ax+b) \times_L \cdots \times_L (ax+b)}_{p^2\text{個}} = ax+b$$

が成立する．

$\boxed{\text{モ}}$ の選択肢

⓪ $ax+b$	① $-ax+b$	② $ax-b$	③ $-ax-b$
④ $bx+a$	⑤ $-bx+a$	⑥ $bx-a$	⑦ $-bx-a$

最後に，a_n は最初の**問題 A.** のものであるとする．これまでの議論により，次を得る．

- a_{2027^2+4} を素数 2027 で割った余りは $\boxed{\text{ヤユヨ}}$.
- a_{2027^2-4} を素数 2027 で割った余りは $\boxed{\text{ラリルレ}}$.

また，a_{2029} を 2027 で割った余りは $\boxed{\text{ロワヲン}}$ であり，花子さんが実行した「a_{p+2} の代わりに a_3 を解答する」というテクニックは，正しい結果を導くとは限らないのである．

ipha: 実はこのテクニック，発見者のうだ (barm_uda) 氏の名を冠して，京大作問サークルでは「**うだエスパー**」って呼ばれているんですよ $\cdots$.

(**数学 IV・D —京大作問サークル・Proxima Technology 杯— 第 1 問は次ページに続く．**)

第 1 問の補足

本問で登場する X_i, a, m や，L, a_L, m_L の構造を一般化したものは**可換体** と呼ばれている．

S を空でない集合とし，S の 2 つの要素の組に対して定義され S の要素を返す関数 $a : S \times S \to S$ および $m : S \times S \to S$ の組 (S, a, m) を考える．この組に対して，混同がない限りは，2 つの要素 $x, y \in S$ に対する $a(x, y)$ と $m(x, y)$ をそれぞれ $x + y$, $x \cdot y$ で表す．

(S, a, m) が以下の**条件**をすべてを満たすとき，(S, a, m) は**可換体**であるという．これらの条件を満たすとき，関数 a, m は，通常の数に関する和と積を一般化したものであると理解される．

条件

すべての $x, y, z \in S$ に対して，以下がすべて成立する:

(F-1) $x + y = y + x$.

(F-2) $(x + y) + z = x + (y + z)$.

(F-3) S の元 0_S が (一意に) 存在して，任意の $x \in S$ に対し，$x + 0_S = x$ を満たす.

(F-4) 任意の $x \in S$ に対し，ある $s \in S$ が存在して $x + s = 0_S$ を満たす.

(F-5) $x \cdot y = y \cdot x$.

(F-6) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

(F-7) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$，$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

(F-8) S の元 1_S が存在して，任意の $x \in S$ に対して $x \cdot 1 = x$ を満たす.

(F-9) 任意の 0_S と異なる $x \in S$ に対し，ある $s \in S$ が存在して $x \cdot s = 1_S$ を満たす.

特に，S が有限集合であるとき，(S, a, m) を**有限体**という．高校数学で学習する「素数 p で割った余りの世界」も，上記の定式化に沿って定義することができ，それが可換体の条件を満たすことが知られている．この有限体は $\mathbb{F}_p$ と書かれる．本問で構成される (L, a_L, m_L) は，$\mathbb{F}_p$ に平方根を一つ導入した可換体である．これは $\mathbb{F}_p$ とは異なる有限体であり，$|L| = p^2$ であるので，$\mathbb{F}_{p^2}$ と書かれる (本問では $p \geqq 3$ としたが，$p = 2$ の場合にも構成する方法がある)．一般に，素数 p と正の整数 n に対して，$|S| = p^n$ を満たす有限体 (S, a, m) が (可換体の同型を除いて) ただ一つ存在することが知られており，この有限体は $\mathbb{F}_{p^n}$ と書かれる．

第 2 問　**(必答問題)**　(配点　50)

以下では，曲線の“曲がり具合”を表す概念について説明する．2 次元ベクトル u, v に対して，その大きさを $\|u\|, \|v\|$ と書き，u と v の内積を $\langle u, v\rangle$ と書く．

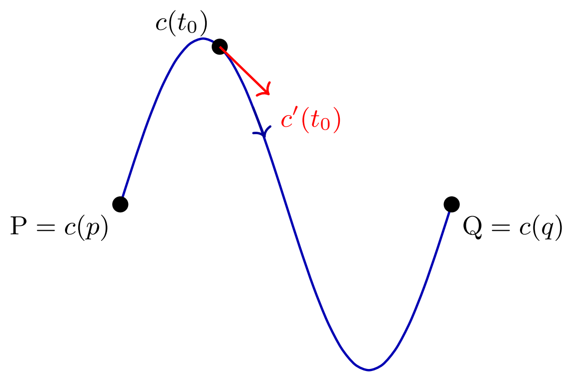
(1) 点 P, Q を座標平面 $\mathbb{R}^2$ 内の点とする．2 点 P, Q を結ぶ曲線 C が，t について微分可能な関数 $x, y : [p, q] \to \mathbb{R}$ を用いて

$$(x(t), y(t)) \quad (p \leqq t \leqq q)$$

と媒介変数表示されているとする．ただし，p, q は $p < q$ なる実数の定数とし，$(x(p), y(p))$, $(x(q), y(q))$ は P, Q の座標であるとする．$c(t) := (x(t), y(t))$ とおく．2 次元ベクトル

$$c'(t) = (x'(t), y'(t)) = \left(\frac{dx}{dt}(t), \frac{dy}{dt}(t)\right)$$

を，時刻 t における $c(t)$ の**速度ベクトル**とよぶ．



曲線 C の長さは

$$\int_p^q \boxed{\text{ア}}\, dt$$

で与えられる．この公式より，

- 曲線 $y = x\sqrt{x}$ の $0 \leqq x \leqq 5$ の部分の長さは $\dfrac{\boxed{\text{イウエ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$ である．
- サイクロイド
$$(x(t), y(t)) := (t - \sin t, 1 - \cos t)$$
の $0 \leqq t \leqq 2\pi$ の部分の長さは $\boxed{\text{キ}}$ である．

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

⓪ $\|c(t)\|$	① $\|c'(t)\|$	② $\|c(t)\|^2$	③ $\|c'(t)\|^2$

(数学 IV・D —京大作問サークル・Proxima Technology 杯— 第 2 問は次ページに続く．)

数学 IV・D —京都大学作問サークル・Proxima Technology 杯—

一般に，同一の曲線 C のパラメータ表示はただ一つであるとは限らない．ある種類の曲線については，C のパラメータとして“始点からの曲線の長さ”を取った表示が存在する．これを C の**弧長パラメータ表示**とよぶ．より正確には，長さ ℓ の曲線 C の媒介変数表示 $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ $(0 \leqq s \leqq \ell)$ が**点 P を基点とする弧長パラメータ表示である**とは，以下の**性質 A.** を満たすことをいう．

性質 A.

- $\gamma(0)$ は点 P に一致する．
- $0 \leqq \ell_0 \leqq \ell$ を満たす実数 ℓ_0 に対し，曲線 $c(s)$ の $0 \leqq s \leqq \ell_0$ の部分の長さは ℓ_0 である．

$\gamma(s) = (x(s), y(s))$ が弧長パラメータ表示であるとき，s を**弧長パラメータ**とよぶ．自己交叉を持たない曲線であれば，弧長パラメータ表示は，始点と向きを指定すれば一意的に定まる．

たとえば，曲線 C として半円

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

を取る．このとき点 $\left(\boxed{\text{ク}}, \boxed{\text{ケ}}\right)$ を基点とする C の弧長パラメータ表示は，$\boxed{\boxed{\text{コ}}}$ である．

$\boxed{\boxed{\text{コ}}}$ の解答群

⓪ $\begin{cases} x(s) = s \\ y(s) = \sqrt{1 - s^2} \end{cases} \quad (-1 \leqq s \leqq 1)$

① $\begin{cases} x(s) = \cos s \\ y(s) = \sin s \end{cases} \quad (0 \leqq s \leqq \pi)$

② $\begin{cases} x(s) = \dfrac{-2s}{1 + s^2} \\ y(s) = \dfrac{1 - s^2}{1 + s^2} \end{cases} \quad (-1 \leqq s \leqq 1)$

③ $\begin{cases} x(s) = \cos \dfrac{s^2}{\pi} \\ y(s) = \sin \dfrac{s^2}{\pi} \end{cases} \quad (0 \leqq s \leqq \pi)$

(数学 IV・D —京大作問サークル・Proxima Technology 杯— 第 2 問は次ページに続く．)

$c(t)$ が $c(0)$ を基点とする弧長パラメータ表示であることは，

$$\int_0^t \boxed{\text{ア}}\, dt = t \quad (0 \leqq t \leqq \ell)$$

が成り立つことと同値である．従って，$c(t)$ が点 P を基点とする弧長パラメータ表示であることは，以下の **性質 B.** が成り立つことであると言い換えられる．

性質 B.

- $c(0)$ は点 P に一致する．
- $0 \leqq t \leqq \ell$ を満たす実数 t に対し，$\boxed{\textbf{サ}}$ が成り立つ．

$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

⓪ $\|c(t)\| = 1$　　① $\|c'(t)\| = 1$　　② $\|c'(t)\| = 0$　　③ $(\|c(t)\|)' = 1$

長さ ℓ の曲線 C について，C のあるパラメータ表示 $c(t) = (x(t), y(t))$ $(p \leqq t \leqq q)$ が存在し，c がすべての $t \in (p, q)$ で $\boxed{\text{ア}} \neq 0$ を満たすとき，C を**良い曲線**と呼ぶこととする．また，このような $c(t)$ を**良いパラメータ表示**と呼ぶこととする．良い曲線 C の良いパラメータ表示 c に対して，C の弧長パラメータ表示 γ が以下の**方針**から構成できる．

方針

$p \leqq t_0 \leqq q$ を満たす実数 t_0 に対し，曲線 C の $c(p)$ から $c(t_0)$ までの部分の長さを $\mathrm{Len}(t_0)$ とすると，

$$\mathrm{Len}(t_0) = \int_p^{t_0} \boxed{\text{ア}}\, dt$$

である．$\mathrm{Len} : [p, q] \to [0, \ell]$ は狭義単調増加関数であるから，その逆関数を $\mathrm{Len}^{-1} : [0, \ell] \to [p, q]$ とする．このとき C のパラメータ表示 $\gamma : [0, \ell] \to \mathbb{R}^2$ を $\gamma(s) := c(\mathrm{Len}^{-1}(s))$ で定める．

このとき，$0 \leqq \ell_0 \leqq \ell$ を満たす実数 ℓ_0 に対し，$\gamma(s)$ の作り方から，曲線 C の $\gamma(0)$ から $\gamma(\ell_0)$ までの部分が ℓ_0 に一致することがわかる．従って，$\gamma(s)$ は $c(p) = \gamma(0)$ を基点とする弧長パラメータ表示である．

例えば，線分 $y = 4x + 3$ $(0 \leqq x \leqq 4)$ の点 $(0, 3)$ を基点とする弧長パラメータは，以下で与えられる．

$$(x(s), y(s)) = \left(\frac{s}{\sqrt{\boxed{\textbf{シス}}}}, \frac{4s}{\sqrt{\boxed{\text{シス}}}} + 3 \right) \quad \left(0 \leqq s \leqq \boxed{\textbf{セ}} \sqrt{\boxed{\textbf{ソタ}}} \right)$$

(**数学 IV・D —京大作問サークル・Proxima Technology 杯— 第 2 問は次ページに続く．**)

数学 IV・D —京都大学作問サークル・Proxima Technology 杯—

次に，平面曲線の曲率について考える．$\gamma(s) := (x(s), y(s))$ $(0 \leqq s \leqq \ell)$ が曲線 C の弧長パラメータ表示であるとし，$x(s), y(s)$ は s に関して 2 階微分可能であると仮定する．2 次元ベクトル $T(s), T'(s)$ を

$$T(s) := \gamma'(s) = (x'(s), y'(s)), \quad T'(s) := \gamma''(s) = (x''(s), y''(s))$$

で定める．$T(s)$，$T'(s)$ はそれぞれ，$\gamma(s)$ の**速度ベクトル**，**加速度ベクトル**と呼ばれる．

速度ベクトル $\gamma'(s) = T(s)$ を反時計回りに 90° 回転させたベクトルを $\mathbf{n}(s)$ と書き，**法線ベクトル**とよぶ．弧長パラメータ表示の性質から，任意の $s \in (0, \ell)$ に対して

$$\|\mathbf{n}(s)\| = \boxed{\text{チ}}, \quad \|T(s)\|^2 = \boxed{\text{ツ}}, \quad \langle T(s), T'(s) \rangle = \boxed{\text{テ}}$$

が成り立つ．よって，ある実数 $\kappa(s)$ が存在して，

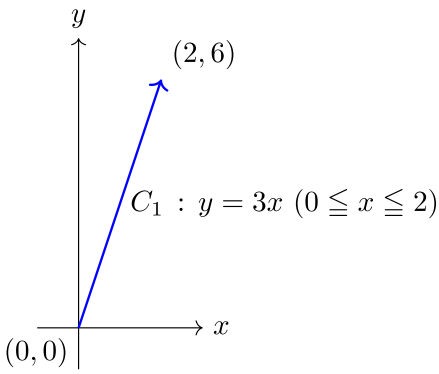
$$T'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$$

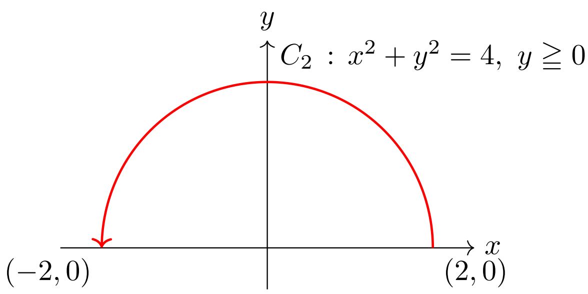
が成り立つ．この実数 $\kappa(s)$ を，曲線 C の点 $\gamma(s)$ における (符号付き) **曲率**という．$\mathbf{n}$ が単位ベクトルであることに注意すれば，

$$\kappa(s) = \langle T'(s), \mathbf{n}(s) \rangle$$

と書くこともできる．γ が弧長パラメータであることに注意すれば，この値は，曲線上を速度 1 で進むときの法線ベクトル $\mathbf{n}(s)$ と加速度ベクトル $T'(s)$ の内積に相当しており，曲線の法線方向への加速度が強いほど大きい値となる．速度 1 の等速円運動の加速度が半径に反比例することに注意すれば，円周では半径が小さいほど曲率 (の絶対値) が大きくなり，直観にも合致する．

以下の曲線 C_1, C_2 を考える．ただし，パラメータ表示の向きは矢印の通りであるとする．C_1 の点 $(1, 3)$ における曲率は $\boxed{\text{ト}}$ であり，C_2 の 点 $(0, 2)$ における曲率は $\boxed{\boxed{\text{ナ}}}$ である．





$\boxed{\boxed{\text{ナ}}}$ の解答群

⓪ 2	① $\sqrt{2}$	② $\dfrac{1}{2}$	③ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(数学 IV・D —京大作問サークル・Proxima Technology 杯— 第 2 問は次ページに続く．)

(2) 長さ ℓ の良い曲線 C の曲率 $\kappa(s)$ を積分した値

$$W(C) := \frac{1}{2\pi}\int_0^\ell \kappa(s)\,ds$$

を考える．ただし，s は弧長パラメータである．すべての $s \in [0,l]$ で $\|T(s)\|^2 = \boxed{\text{ツ}}$ であるから，ある微分可能な関数 $\alpha(s)$ を用いて

$$T(s) = (\cos\alpha(s), \sin\alpha(s))$$

と表すことができる．このとき $\mathbf{n}(s) = (-\sin\alpha(s), \cos\alpha(s))$ である．よって，

$$T'(s) = \frac{d\alpha}{ds}(s)\cdot\mathbf{n}(s), \quad \kappa(s) = \frac{d\alpha}{ds}(s)$$

を得る．よって，

$$W(C) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\ell \frac{d\alpha(s)}{ds}\,ds = \frac{1}{2\pi}(\alpha(\ell)-\alpha(0))$$

である．これより，閉曲線 C に対して $W(C)$ は整数値であることも分かる (これを**回転数**という)．上記からも分かるように，曲率の情報から，曲線全体の巻き付き方の情報が得られる．$W(C)$ の具体的な計算について考えてみよう．

1. (1) の曲線 C_1, C_2 について，$W(C_1) = \boxed{\textbf{ニ}}$，$W(C_2) = \dfrac{\boxed{\textbf{ヌ}}}{\boxed{\textbf{ネ}}}$ である．
2. A を非負の実数とする．閉曲線 Γ_A を

$$\Gamma_A := \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \mid r = 1 + A\cos\theta \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)\}$$

で与える．これを**リマソン曲線**という．Γ_A のパラメータ表示

$$c_A : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2; \quad \theta \mapsto c_A(\theta) := ((1 + A\cos\theta)\cos\theta,\ (1 + A\cos\theta)\sin\theta)$$

を考える．$A \neq \boxed{\textbf{ノ}}$ であるとき，$c_A(t)$ は良いパラメータ表示である．したがって $A \neq \boxed{\text{ノ}}$ ならば Γ_A は良い曲線であり，Γ_A の $(1+A, 0)$ を基点とする弧長パラメータ表示 $\gamma_A(s)$ が存在する．Γ_A の回転数は

$$W(\Gamma_A) = \begin{cases} \boxed{\textbf{ハ}} & \left(0 \leqq A < \boxed{\text{ノ}} \text{ であるとき}\right) \\ \boxed{\textbf{ヒ}} & \left(\boxed{\text{ノ}} < A \text{ であるとき}\right) \end{cases}$$

と求まる．回転数 $W(\Gamma_A)$ は A の関数として見ると局所定数関数，すなわち，一定の範囲では定数関数になっていると観察できる．このことは，曲線の形状を小さく変化させても，全体の巻き付き方が変化しないことからも理解できる．

(数学 IV・D —京大作問サークル・Proxima Technology 杯— 第 2 問は次ページに続く．)

数学 IV・D —京都大学作問サークル・Proxima Technology 杯—

原点を通らない良い閉曲線 C の良いパラメータ表示

$$c(t) = (x(t), y(t)) \qquad (p \leqq t \leqq q)$$

を考える．ただし，$c(p) = c(q)$ である．

ここで，

$$H(t) = \left(\frac{-y(t)}{\|c(t)\|^2}, \frac{x(t)}{\|c(t)\|^2} \right)$$

とおくと，$H(t)$ は原点中心の円のある点の接ベクトルを与える．このとき，

$$L(c) := \frac{1}{2\pi} \int_p^q \langle c'(t), H(t) \rangle \, dt$$

を考える．この $L(c)$ を (原点における) **巻き数**といい，原点の周りの曲線の巻き方を表す量である．同様に，一般の点 $X \in \mathbb{R}^2 \setminus C$ を基準とする閉曲線 C の巻き数 $L_X(c)$ は，X を原点 $(0,0)$ に移す平行移動の変換を $t_{-X} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ とおくとき，$L_X(c) := L(t_{-X} \circ c)$ と定義される．

例として，相異なる正の実数 a, b に対して，$(a, 0)$ を中心とする半径 b の円周

$$K_{a,b} : (x-a)^2 + y^2 = b^2$$

を考える．$K_{a,b}$ のパラメータ表示として

$$c_{a,b}(t) := (a + b\cos t, b \sin t) \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

を取る．このとき，

$$\langle c'_{a,b}(t), H(t) \rangle = \frac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘ}}} \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2 + 2ab\cos t} \right)$$

であるから，

$$2\pi L(c_{a,b}) = \frac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘ}}} \left(2\pi - \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2 + 2ab\cos t} \, dt \right)$$

となる．ここで，

$$I_{a,b} := \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 + b^2 + 2ab\cos t} = \frac{2\pi}{\boxed{\text{ホ}}}$$

であるから，$L(c_{a,b})$ は以下の通りである．

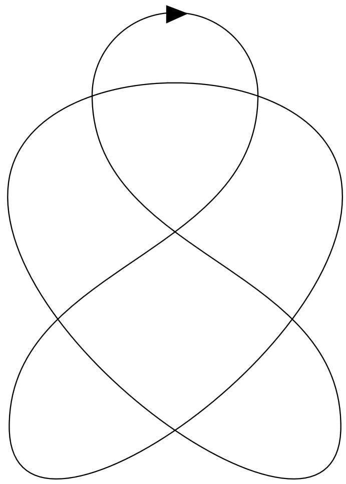
$$L(c_{a,b}) = \begin{cases} \boxed{\text{マ}} & (0 < a < b \text{ のとき}) \\ \boxed{\text{ミ}} & (0 < b < a \text{ のとき}) \end{cases}$$

$\boxed{\text{ホ}}$ の解答群

⓪ $a+b$	① $\lvert a-b \rvert$	② $\sqrt{a^2+b^2}$	③ $\sqrt{\lvert a^2-b^2 \rvert}$	④ $(a+b)^2$
⑤ $(a-b)^2$	⑥ a^2+b^2	⑦ $\lvert a^2-b^2 \rvert$	⑧ a^2+ab+b^2	⑨ a^2-ab+b^2

数学 IV・D —京都大学作問サークル・Proxima Technology 杯—

最後に，平面 $\mathbb{R}^2$ 上の閉曲線 C であって，以下のように自己交差を持つものを考える．ただし，C のパラメータ表示 $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ は微分可能であり，かつその向きは図の矢印によって示される．また，$c(0) = c(1)$ は矢印の位置にあり，$0 < t < 1$ に対して $c(t) \neq c(0)$ であるものとする．



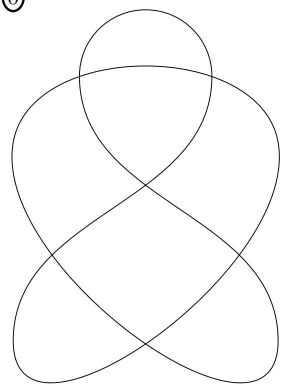
このとき，$L_{\mathrm{P}}(C) = -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$ となる点 P 全体からなる領域を過不足なく塗りつぶしている図として最も適当なものは, それぞれ

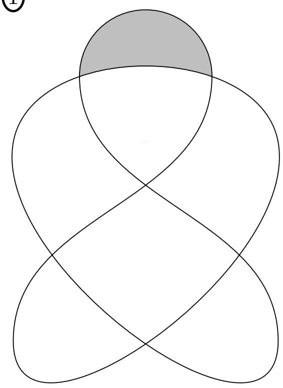
$$\boxed{ム},\ \boxed{メ},\ \boxed{モ},\ \boxed{ヤ},\ \boxed{ユ}$$

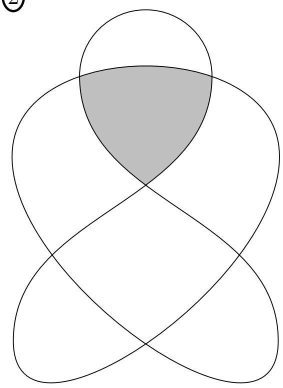
である．選択肢は次ページの 0 ～ 9 の図より選択せよ．

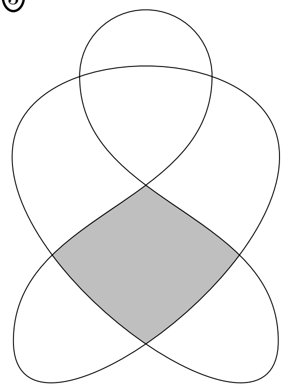
(**数学 IV・D —京大作問サークル・Proxima Technology 杯— 第 2 問は次ページに続く．**)

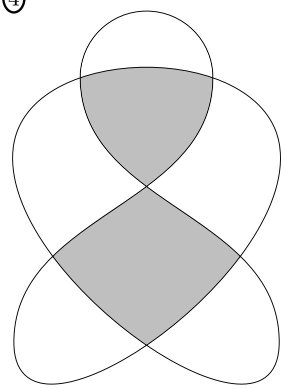
$\boxed{\text{ム}}$ 〜 $\boxed{\text{ユ}}$ の解答群 (同じものを複数回選んでもよい.)

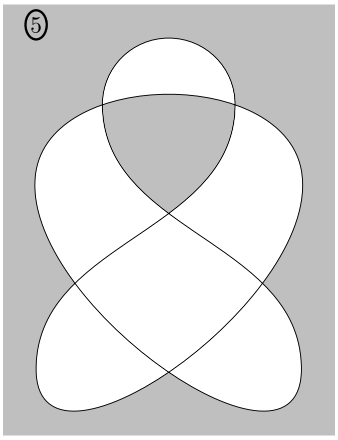
⓪


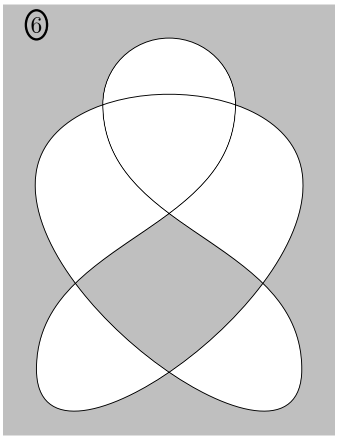
①


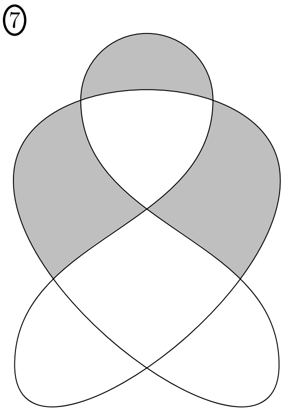
②


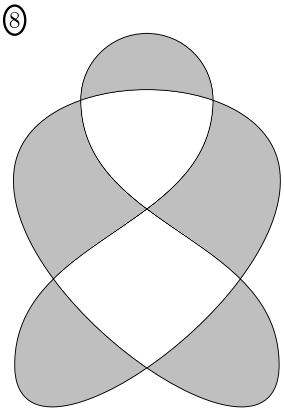
③


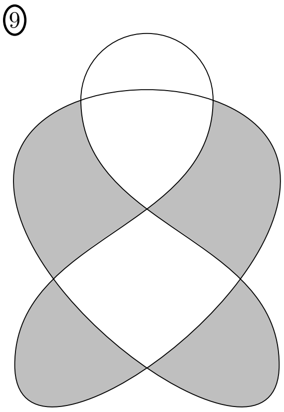
④


⑤


⑥


⑦


⑧


⑨


第 3 問　(必答問題)　(配点　50)

本問では，虚数単位 $\sqrt{-1}$ を表す記号として i を用いる．

太郎さんと花子さんは X 高校の学生である．数学の期末テストを終えた二人は，出題されたとある問題について話し合っていた $\cdots$．

花子: テストお疲れさま！今日の数学，どうだった？
太郎: 大体できた！けれど，最後の級数だけ全然分からなかったな．
花子: あ，そうそう！ たしか，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n-2}$$

になったけど，ちょっと難しい公式使ったなあ．
太郎: あれ？僕は

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n+3}$$

だと思ってた $\cdots\cdots$ っていうか，求められたの！？
花子: うん，私の方法なら太郎君の級数も多分求められるから，今から教えるね．
太郎: ！？！？

(1) 花子さんと太郎さんが導いた級数の一般化として，次の級数 $S(a,b)$ を考えてみよう．

$$S(a,b) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+an+b}$$

ただし，a は非負整数，b は実数とし，すべての正の整数 n に対して $n^2+an+b \neq 0$ であると仮定する．

級数の収束性について論じる．条件を満たすいかなる a, b についても

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n^2+an+b} = \boxed{\text{ア}}$$

であるから, 次の**性質 A.** を持つ (a, b にのみ依存する) 正の整数 N_0 が存在する．

性質 A.

すべての N_0 より大きい整数 n に対して， 不等式 $\boxed{\text{ア}} - 1 < \dfrac{n^2-1}{n^2+an+b} < \boxed{\text{ア}} + 1$ が成り立つ．

(数学 IV・D —京大作問サークル・Proxima Technology 杯— 第 3 問は次ページに続く．)

性質 A. より，正の整数 $M > N_0$ に対して

$$\sum_{n=N_0+1}^{M} \frac{1}{n^2+an+b} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\boxed{\text{ア}}+1}{n^2-1} = \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

である．よって，すべての正の整数 M に対して次が成立する:

$$\sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n^2+an+b} < \max_{1 \leqq N \leqq N_0} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2+an+b} \right) + \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}.$$

そこで

$$C := \max_{1 \leqq N \leqq N_0} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2+an+b} \right) + \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

とおくと，C は M に依存しない定数である．したがって，M で添え字づけられた実数列

$$\left\{ \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n^2+an+b} \right\}_{M=1,2,\ldots}$$

は**事実 B.** より収束することが従う．実際，この数列のすべての項は C 未満であり，$M > N_0$ において単調増加である．

事実 B．(実数列の単調収束定理)

$\{a_n\}_{n \geqq 1}$ は実数列とし，ある n に依存しない定数 C が存在して $a_n < C$ がすべての正の整数 n で成り立つとする．また，ある整数 N_0 が存在して $n > N_0$ で $a_n \leqq a_{n+1}$ であるとする．このとき，$\lim_{n \to \infty} a_n$ は収束する．

特に，整数でない実数 α に対し，

$$S_0(\alpha) := S(0, -\alpha^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-\alpha^2},$$

$$S_1(\alpha) := S(1, -\alpha^2-\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2-(\alpha+\frac{1}{2})^2}$$

はそれぞれ収束する級数である．さらに，部分分数分解を考えることで

$$\left(\boxed{\text{エ}}\right) S_0(\alpha) - \left(\boxed{\text{オ}}\right) S_1(\alpha) + \frac{1}{\boxed{\text{カ}}} = 0$$

を得る．したがって，$S_0(\alpha), S_1(\alpha)$ の一方の値が求まれば，他方の値も上式から求めることができる．

$\boxed{\text{エ}}$ ～ $\boxed{\text{カ}}$ の選択肢 (同じものを複数回選んでもよい.)

⓪ $\alpha-2$	① $\alpha-1$	② α	③ $\alpha+1$	④ $\alpha+2$
⑤ $2\alpha-2$	⑥ $2\alpha-1$	⑦ 2α	⑧ $2\alpha+1$	⑨ $2\alpha+2$

(**数学 IV・D —京大作問サークル・Proxima Technology 杯— 第 3 問は次ページに続く．**)

数学 IV・D —京都大学作問サークル・Proxima Technology 杯—

非負整数 A を用いて $a = 2A$ と表せるとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2An + b} = S_0\left(\sqrt{\boxed{\text{キ}}}\right) - \sum_{n=1}^{A} \frac{1}{n^2 - \left(\boxed{\text{キ}}\right)}$$

である．$a = 2A + 1$ と表せるときは，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + (2A+1)n + b} = S_1\left(\sqrt{\boxed{\text{ク}}} - \frac{1}{2}\right) - \sum_{n=1}^{A} \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2 - \left(\boxed{\text{ク}}\right)}$$

である (ただし $A = 0$ のとき，第 2 項の総和は 0 とみなす)．第 2 項は有限項の寄与であり，直接の計算が可能である．よって，$S_0(\alpha)$ の値が求まれば，$S(a, b)$ の値も求まるといえる．

$\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ の選択肢 (同じものを複数回選んでもよい.)

⓪ $A^2 + b$	① $A^2 - b$	② $A^2 - 4b$	③ $A^2 + 4b$
④ $(A+\frac{1}{2})^2 + b$	⑤ $(A+\frac{1}{2})^2 - b$	⑥ $(A+1)^2 + b$	⑦ $(A+1)^2 - b$

(数学 IV・D —京大作問サークル・Proxima Technology 杯— 第 3 問は次ページに続く．)

(2) 次に，求めたい級数と三角関数の関係について論じる．以下では，次の記号を用いる．

$$\csc\theta := \frac{1}{\sin\theta}, \quad \sec\theta := \frac{1}{\cos\theta}, \quad \cot\theta := \frac{1}{\tan\theta}.$$

このとき，$\cot\alpha\pi$ は次のような表示を持つことが知られている．

補題 C.

n を正の整数とする．このとき，任意の $0<\alpha<1$ を満たす実数 α に対して，次が成立する：

$$\cot\alpha\pi = \frac{1}{2^n}\left(\cot\frac{\alpha}{2^n}\pi + \cot\frac{\alpha-2^{n-1}}{2^n}\pi\right) + \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^{n-1}-1}\left(\cot\frac{\alpha+k}{2^n}\pi + \cot\frac{\alpha-k}{2^n}\pi\right).$$

補題 C. の証明を述べる．関数 f_0，f_1 を

$$f_0(x) := \frac{x}{2}, \qquad f_1(x) := \frac{x-1}{2}$$

と定め，任意の長さ k の bit 列，すなわち，0 と 1 からなる文字列 $b_{k-1}b_{k-2}\ldots b_1b_0$ に対して, 関数 $f_{b_{k-1}b_{k-2}\cdots b_1b_0}$ を

$$f_{b_{k-1}b_{k-2}\cdots b_1b_0}(x) := f_{b_{k-1}}(f_{b_{k-2}\cdots b_1b_0}(x))$$

により帰納的に定める．長さ n の bit 列全体の集合を X_n とおき，$B_0, B_1 \in X_n$ を $B_i = i00\cdots000$ $(i=0,1)$ とおく．このとき，示すべき等式の右辺は

$$\frac{1}{2^n}\left(\cot(f_{B_0}(\alpha)\pi) + \cot(f_{B_1}(\alpha)\pi) + \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1}\left(\cot\frac{\alpha+k}{2^n}\pi + \cot\frac{\alpha-k}{2^n}\pi\right)\right)$$

となることに注意する．

任意の $B \in X_n$ に対して，ある整数 k_B が存在して，$f_B(x) = (x-k_B)/2^n$ と表すことができる．たとえば,

- $k_{1001001} =$ $\boxed{\text{ケコ}}$.
- $k_B = 2025$ を満たす長さ 12 の bit 列 B は $\boxed{\text{サシスセソタチツテトナニ}}$.

ここで，$\cot\alpha\pi$ について,

$$\cot\alpha\pi = \frac{1}{2}\left(\cot(f_0(\alpha)\pi) + \cot(f_1(\alpha)\pi)\right)$$

を繰り返し用いることで，次を得る：

$$\begin{aligned}\cot\alpha\pi &= \frac{1}{2^n}\sum_{B\in X_n}\cot(f_B(\alpha)\pi) \\ &= \frac{1}{2^n}\left(\cot(f_{B_0}(\alpha)\pi) + \cot(f_{B_1}(\alpha)\pi) + \sum_{\substack{B\in X_n \\ B\neq B_0, B_1}}\cot\left(\frac{\alpha-k_B}{2^n}\pi\right)\right).\end{aligned}$$

cot の周期性 $\cot\theta = \cot(\theta+\pi)$ に注意することで，これは等式の右辺に一致することがわかる．よって，**補題 C.** が証明された.

(**数学 IV・D —京大作問サークル・Proxima Technology 杯— 第 3 問は次ページに続く．**)

数学 IV・D —京都大学作問サークル・Proxima Technology 杯—

補題 C. の右辺の第 2 項について，以下が成り立つ．

$$\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^{n-1}-1}\left(\cot\frac{\alpha+k}{2^n}\pi+\cot\frac{\alpha-k}{2^n}\pi\right)-\frac{2\alpha}{\pi}\sum_{k=1}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{\alpha^2-k^2}$$
$$=\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^{n-1}-1}\int_{(k-\alpha)\pi/2^n}^{(k+\alpha)\pi/2^n}\left(t^{-\boxed{ヌ}}-\left(\boxed{ネ}(t)\right)^2\right)dt$$

$\boxed{ネ}$ の選択肢

⓪ sin	① cos	② tan	③ csc	④ sec
⑤ cot	⑥ sinh	⑦ cosh	⑧ tanh	⑨ log

ここで，

$$\lim_{t\to 0}\frac{t-\sin t}{t^3}=\frac{\boxed{ノ}}{\boxed{ハ}}$$

であるから，正の実数 t に対して $F(t):=t^{-\boxed{ヌ}}-\left(\boxed{ネ}(t)\right)^2$ とおくと，

$$\lim_{t\to 0}F(t)=\frac{\boxed{ヒフ}}{\boxed{ヘ}}$$

を得る．よって，$|F(t)|$ は閉区間 $[0,\pi/2]$ 上の連続関数として拡張され，$|F(t)|$ の $0\leqq t\leqq\pi/2$ 上の最大値が存在することが保証される (**補足 3.1**) ので，これを M_F と置く．積分に関する三角不等式から，

$$\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^{n-1}-1}\int_{(k-\alpha)\pi/2^n}^{(k+\alpha)\pi/2^n}F(t)\,dt\right|\leqq\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^{n-1}-1}\int_{(k-\alpha)\pi/2^n}^{(k+\alpha)\pi/2^n}|F(t)|\,dt$$
$$\leqq\frac{2^{n-1}-1}{2^n}\cdot\frac{2\alpha\pi}{2^n}\cdot M_F$$
$$\to 0\quad(n\to\infty).$$

である．以上の議論により，$0<\alpha<1$ を満たす実数 α に対し，以下の式 $(\star)$ が成立する．

$$\frac{\pi\cot\alpha\pi}{2\alpha}=\frac{1}{\boxed{ホ}}\alpha^{-\boxed{マ}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\alpha^2}\qquad(\star)$$

(**数学 IV・D —京大作問サークル・Proxima Technology 杯— 第 3 問は次ページに続く．**)

(3) 式 ($\star$) が成立する α の範囲は，さらに拡張することができる．このことを確認してみよう．

以下，集合 D は $\mathbb{C}$ または差集合 $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ であるとする．これらは弧状連結な開集合である (**補足 3.2**)．関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が 次の**条件 D.** を満たすとき，f は D **上の正則関数**であるという．これは，実関数における微分可能性の概念を複素関数に拡張したものである．

条件 D.

$h \neq 0$ は十分に絶対値が小さい複素数とする．複素数 $z \in D$ を任意に固定する．関数 r を

$$r(h) := \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

で定める．このとき，(z にのみ依存する) ある $\alpha_z \in \mathbb{C}$ が存在して $\lim_{h\to 0} |r(h)-\alpha_z| = 0$ を満たす．

例えば，以下の関数 $f_k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $(0 \leqq k \leqq 5)$ のうち，$\mathbb{C}$ 上の正則関数であるような番号 k のすべてについて整数 2^k をすべて足し上げた値は $\boxed{\textbf{ミム}}$ となる．

(0) $f_0(z) = 0$　(1) $f_1(z) = i$　(2) $f_2(z) = \mathrm{Re}(z)$

(3) $f_3(z) = iz$　(4) $f_4(z) = \overline{z}$　(5) $f_5(z) = |z|^2$

その他にも，正則関数に関する下記の**事実 E.** が知られている．

事実 E.

- $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を 以下で定義する:

$$\exp(x+iy) = e^{x+iy} := e^x(\cos y + i\sin y)$$

ただし，x, y は実数である．exp は $\mathbb{C}$ 上の正則関数であり，指数関数 e^x の $\mathbb{C}$ 上の拡張である．

- $\cot : \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ を以下で定義する:

$$\cot(z) := \frac{i(e^{iz}+e^{-iz})}{e^{iz}-e^{-iz}}.$$

cot は $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ 上の正則関数であり，三角関数 $\cot\theta$ の $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ 上の拡張である．

また，D を弧状連結な開集合 (**補足 3.2**) であるとするとき，

- 任意の 2 つの D 上正則関数の和と積もまた D 上の正則関数である．
- D 上の正則関数 f と，$\mathbb{C}$ 上の正則関数 g の合成 $g\circ f$ もまた D 上の正則関数である．

(**数学 IV・D —京大作問サークル・Proxima Technology 杯— 第 3 問は次ページに続く．**)

数学 IV・D —京都大学作問サークル・Proxima Technology 杯—

級数 $S_0(z)$，$S_1(z)$ を関数 $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ として扱うとき，これらは $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ 上の正則関数を定める (**補足 3.3**)．さらに，既に示したことから，実数 α $(0<\alpha<1)$ に対して

$$S_0(\alpha)=\frac{1}{\boxed{\text{ホ}}}\alpha^{-\boxed{\text{マ}}}-\frac{\pi}{2\alpha}\cot\alpha\pi$$

$$\left(\boxed{\boxed{\text{エ}}}\right)S_0(\alpha)-\left(\boxed{\boxed{\text{オ}}}\right)S_1(\alpha)+\frac{1}{\boxed{\boxed{\text{カ}}}}=0$$

が成り立つ．よって, 以下の**定理 F.** から，上記の関係式はすべての $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ に対しても成り立つことがわかる．

定理 F. (一致の定理)

f，$g:D\to\mathbb{C}$ を D 上の正則関数とする．ある $c\in D$ と，ある D の点列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して，次の 2 条件を満たすと仮定する．

- すべての n で $z_n\neq c$ かつ $f(z_n)=g(z_n)$.
- $\lim_{n\to\infty}|z_n-c|=0$.

このとき，すべての $z\in D$ に対して $f(z)=g(z)$ である．特に，関数 $f(z),g(z)$ が D 内のある線分上で等しいなら，D 内のすべての点 z に対して $f(z)=g(z)$ である．

これまでの議論により，花子さんと太郎さんが導いた級数の値は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n-2}=\frac{\boxed{\text{メ}}}{\boxed{\text{モ}}}+\frac{\pi}{\sqrt{\boxed{\text{ヤユ}}}}\tan\left(\frac{\sqrt{\boxed{\text{ヤユ}}}}{\boxed{\text{ヨ}}}\pi\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2n+3}=\frac{\pi}{\boxed{\text{ラ}}\sqrt{\boxed{\text{リ}}}}\left(\frac{\boxed{\text{ル}}}{1-\exp\left(-\boxed{\text{レ}}\sqrt{\boxed{\text{ロ}}}\pi\right)}-1\right)-\frac{\boxed{\text{ワ}}}{\boxed{\text{ヲン}}}$$

であることが分かった．

先生: 最後にこの問題ですが，分母が違う人が多すぎます．正しい分母は n^2+3n+2 ですよ．因数分解できるから，この級数の求め方は習いましたよね．

花子: $\cdots\cdots$.

太郎: $\cdots\cdots$.

(**数学 IV・D —京大作問サークル・Proxima Technology 杯— 第 3 問は次ページに続く．**)

第 3 問の補足

■**補足 3.1(最大値の定理)**　有界閉区間 $[a,b]$ 上の実数値連続関数 f は $[a,b]$ 上で最大値 M を持つ．すなわち，$c \in [a,b]$ が存在して，任意の $x \in [a,b]$ に対して $f(x) \leqq f(c) = M$ となる．

■**補足** 3.2　**定理 F.** は，D が弧状連結な開集合である場合にも成立する．つまり，部分集合 $D \subset \mathbb{C}$ が以下の条件をすべて満たす場合でもよい．

- 任意の点 $w \in D$ に対し，ある (十分に小さい) 実数 $r > 0$ が存在して，複素平面上で w から距離 r 未満の複素数 z はすべて D に属す．
- 任意の $w_0,\ w_1 \in D$ に対して, ある実数値連続関数 $u,\ v : [0,\ 1] \to \mathbb{R}$ が存在し, $\gamma(t) = u(t)+v(t)i$ とおくと次を満たす: すべての $t \in [0,\ 1]$ で $\gamma(t) \in D$ かつ $\gamma(0) = w_1, \gamma(1) = w_2$ である．

  (すなわち，D の任意の 2 点 $w_0,\ w_1$ は連続曲線で結ぶことができる．)

■**補足 3.3(級数が正則関数であるための十分条件)**　D を弧状連結な開集合とし，$\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ を D 上の正則関数列とする．級数で表された D 上の関数

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

が D の任意のコンパクト部分集合 K 上で一様収束すると仮定する．このとき，$f(z)$ は D 上の正則関数を定める．

第 4 問　**(必答問題)**　(配点　50)

この設問では，工学的慣習に従い，虚数単位 $\sqrt{-1}$ を表す記号として j を用いる．

「Proxima (プロキシマ) 」は，ラテン語で「最も近いもの」や「隣接するもの」を意味し，空間的・時間的な近さを表す言葉として古くから用いられてきた．

株式会社 Proxima Technology® の社名は，数理最適化における専門用語「Proximal operator (近接作用素)」に由来する．Proximal operator は，滑らかでない関数を含む最適化問題において用いられる基本的かつ重要な概念であり，同社技術の数理最適化への関与を象徴する．さらに，企業ロゴは，太陽系に最も近い恒星「プロキシマ・ケンタウリ（Proxima Centauri)」がモチーフにされている．

(**数学 IV・D —京大作問サークル・Proxima Technology 杯— 第 4 問は次ページに続く．**)

数学 IV・D —京都大学作問サークル・Proxima Technology 杯—

(1) 太陽系からプロキシマ・ケンタウリに向けて，簡易的な宇宙船を飛ばすことを考えよう．

図 1 において，物体の変位および力の向きは右向きを正とする．宇宙船内には紙面奥側に向かって一様な定磁場 (磁束密度の大きさ B) がかけられている．船内の内壁には質量 m の導体棒が粘性係数 k のダンパにより接続されており，宇宙船内の観測者から見た導体棒の速度が v のとき，導体棒はダンパから v とは逆の向きに大きさ $k|v|$ の力を受ける．導体棒は幅 l の平行な導電性レール上を滑らかに動く．また，レール間には可変の電源電圧 u と抵抗 r およびコイル L が接続されている．はじめ導体棒は静止しているが，電源電圧により導体棒を流れる電流にローレンツ力がはたらくことで導体棒が動き，ダンパに力を加える．この際，ダンパ伝いに宇宙船外装に力が加えられることで宇宙船が加速する．

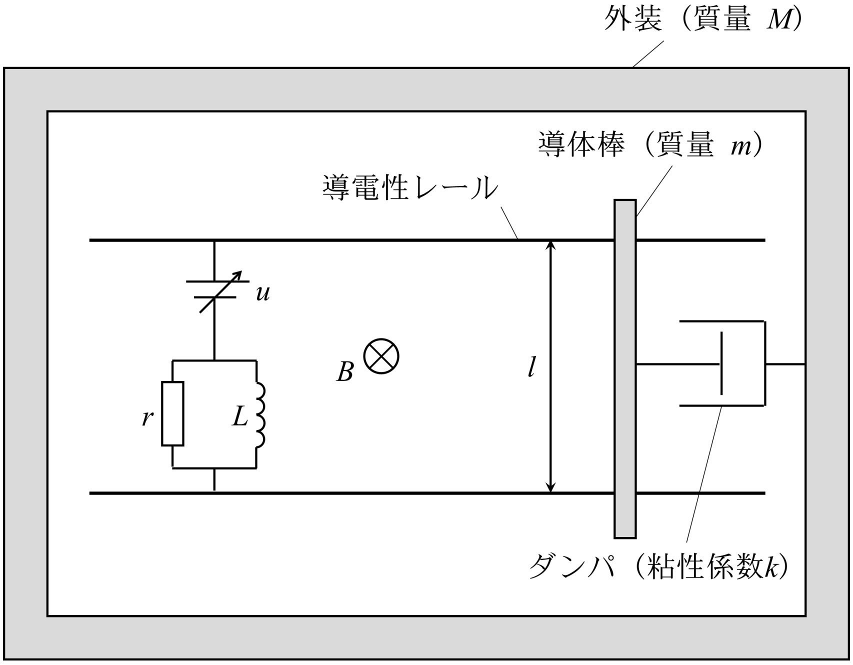


図 1

以上のような原理で動作する宇宙船において，電源電圧 u を入力として適切に与えることにより，宇宙船を制御する．すなわち，宇宙船ができるだけ一定の速度で進行できる状態にすることを考える．

(数学 IV・D —京大作問サークル・Proxima Technology 杯— 第 4 問は次ページに続く．)

数学 IV・D —京都大学作問サークル・Proxima Technology 杯—

まずは宇宙船を構成する物体に関して成立する式をまとめてみよう．ある時刻 t における運動方程式は以下の通りである．ただし，x は自然長の位置からの導体棒の変位，v は宇宙船内の観測者から見た導体棒の速度，i は導体棒を流れる電流 (導体棒を上から下へと流れる向きを正とする)，w は宇宙船外の観測者から見た宇宙船の速度である．

- 導体棒に関する運動方程式

$$m \times \boxed{\text{ア}} = Bl \times \boxed{\text{イ}} - k \times \boxed{\text{ウ}} - m \times \boxed{\text{エ}}$$

- 宇宙船外装に関する運動方程式

$$M \times \boxed{\text{エ}} = k \times \boxed{\text{ウ}}$$

また，抵抗 r，コイル L を流れる電流をそれぞれ i_1，i_2 とし，導体棒に発生する誘導起電力を考慮すれば，回路内のキルヒホッフの法則は次式の通りである．

- キルヒホッフの法則

$$u - Bl \times \boxed{\text{オ}} - r \times \boxed{\text{カ}} = u - Bl \times \boxed{\text{オ}} - L \times \boxed{\text{キ}} = 0$$

$$i_1 + i_2 = i$$

$\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{キ}}$ の選択肢 (同じものを複数回選んでもよい．)

⓪ v	① $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$	② w	③ $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$	④ i_1
⑤ $\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$	⑥ i_2	⑦ $\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$	⑧ i	⑨ $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

以上の連立微分方程式を解けば，電源電圧 u に対する宇宙船の速度 w を求めることができる．しかし，上式から直接的に解を求めるのは多くの労力を要する．

(**数学 IV・D —京大作問サークル・Proxima Technology 杯— 第 4 問は次ページに続く．**)

そこで役に立つ手段が**ラプラス変換**である．ある連続関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ をラプラス変換した関数 $\mathcal{L}[f(t)](s)$ は，以下の積分の式によって (収束域上で) 定義される:

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \quad \left(:= \lim_{R\to\infty} \int_0^R f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t \right).$$

ただし，変数 s は複素数である．$\mathcal{L}[f(t)](s)$ は，f に対する大文字を用いて $F(s)$ と書かれることもある．

たとえば，$f(t) = e^{-at}$ $(a \in \mathbb{R}$ は定数) の場合，

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-at}e^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-(a+s)t}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{a+s}e^{-(a+s)t} \right]_0^\infty = \frac{1}{a+s}$$

である．同様に，$f_1(t) := t$，$f_2(t) := \sin t$ のラプラス変換をそれぞれ $F_1(s)$，$F_2(s)$ とするとき，s が正の実数のときに限定すれば，

$$F_1(s) = \boxed{\text{ク}}, \qquad F_2(s) = \boxed{\text{ケ}}$$

となる．実際には，$\mathrm{Re}(s) > 0$ を満たす複素数 s に対しても上式は有効である．

以下，$f(t)$ は t について微分可能であるとする．ラプラス変換が微分方程式を解くのに有効である理由は，導関数 $f'(t)$ のラプラス変換が s の簡潔な式で扱えるという点にある．いま，ある定数 $\beta > 0$ が存在して，すべての $t \geqq 0$ に対して

$$|f(t)| \leqq \beta e^{\alpha t}$$

が成立すると仮定するとき，$s > \alpha$ なる実数 s (より広くは，$\mathrm{Re}(s) > \alpha$ を満たす複素数 s) に対して以下が成立する．

$$\mathcal{L}[f'(t)](s) = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}\mathrm{d}t = \boxed{\text{コ}} \times F(s) - \boxed{\text{サ}}$$

$\boxed{\text{ク}}$ 〜 $\boxed{\text{コ}}$ の選択肢 (同じものを複数回選んでも良い．)

⓪ 0	① 1	② s	③ $\frac{1}{s}$	④ $\frac{1}{s+1}$
⑤ s^2	⑥ $\frac{1}{s^2}$	⑦ $\frac{1}{s^2+1}$	⑧ e^s	⑨ e^{-s}

$\boxed{\text{サ}}$ の選択肢

⓪ $f(0)$	① $f'(0)$	② $F(0)$	③ $f(s)$
④ $f(0)^{-1}$	⑤ $f'(0)^{-1}$	⑥ $F(0)^{-1}$	⑦ $f(s)^{-1}$

(**数学 IV・D —京大作問サークル・Proxima Technology 杯— 第 4 問は次ページに続く．**)

(2) 以降は，次の**条件**のもとで考察する．

条件

$m = 1.6$ kg,	$r = 1\ \Omega$,	$L = 4$ H,
$B = 0.8$ T,	$l = 1$ m,	$k = 0.4\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

外装の質量 M は設計の段階で自由に変更することができるとする．これらの条件のもと，(1) における微分方程式 (運動方程式，キルヒホッフの法則) をそれぞれラプラス変換してみよう．ただし，$W(s) = \mathcal{L}[w(t)](s)$，$U(s) = \mathcal{L}[u(t)](s)$ とし，初期値の条件については

$$v(0) = 0, \quad w(0) = 0, \quad i(0) = i_1(0) = i_2(0) = 0$$

とする．このとき，$W(s)$ を $U(s)$ の式で表すと

$$W(s) = \frac{\boxed{\text{シ}}\,s + \boxed{\text{ス}}}{\left\{\boxed{\text{セソ}}\,Ms^2 + \left(\boxed{\text{タチ}}\,M + \boxed{\text{ツ}}\right)s + \boxed{\text{テ}}\,M\right\}s}U(s)$$

となる．ラプラス変換後において，電圧 $U(s)$ は，誤差 $E(s) := R(s) - W(s)$ に対して決まる．この二つの間を受け持つ関数を $C(s)$ とする：

$$U(s) = C(s)E(s).$$

ラプラス変換を施すと，微分や積分といった作用素が変数 s を用いた記号操作に置き換えられる．よって関数 $C(s)$ は，制御入力 $U(s)$ と誤差 $E(s)$ の間の微分方程式に関する情報を集約した s の関数として解釈できるため，これを**制御器**とよぶ．

以下では，正の定数 K を用いて表される制御器

$$C(s) = K\left(1 - \frac{4}{5}s - \frac{1}{5s}\right)$$

について考える．宇宙船の速度 $w(t)$ のラプラス変換を $W(s)$ とおく．ここで

$$P(s) := \frac{\boxed{\text{シ}}\,s + \boxed{\text{ス}}}{\left\{\boxed{\text{セソ}}\,Ms^2 + \left(\boxed{\text{タチ}}\,M + \boxed{\text{ツ}}\right)s + \boxed{\text{テ}}\,M\right\}s}$$

とおく．このとき，$W(s)$ は $P(s)$，$C(s)$，$R(s)$ を用いて以下の形で表せる:

$$W(s) = \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}R(s).$$

$\boxed{\text{ト}}$，$\boxed{\text{ナ}}$ の選択肢 (同じものを複数回選んでもよい．)

0 $P(s)$	1 $C(s)$	2 $P(s)C(s)$	3 $1 + P(s)C(s)$

(**数学 IV・D —京大作問サークル・Proxima Technology 杯— 第 4 問は次ページに続く．**)

数学 IV・D —京都大学作問サークル・Proxima Technology 杯—

ナイキストの安定判別法は，この制御系の有界入力有界出力安定性 (**補足 4.2**) を判別する方法のひとつである．この方法においては，誤差と速度の間の関係を記述する**一巡伝達関数**，すなわち $F(s) := \boxed{\boxed{\text{ト}}}$ を用いる．この $F(s)$ を

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

と表す．ただし，$D(s)$，$N(s)$ は s の多項式であり，共通の零点を持たないとする．$F(s)$ の極 ($D(s) = 0$ を満たす複素数 s) のうち，実部が負でないものを**不安定極**という．$F(s)$ の不安定極の個数は，重複度を込めずに数えると $\boxed{\text{ニ}}$ 個である．

$F(s)$ の不安定極であって虚軸上に存在するもののうち，虚部が n 番目に大きい極を p_n とする．以下の条件で設定される曲線上を時計回りにまわる経路を**ナイキスト経路**という．

ナイキスト経路

(1) 原点を中心，半径を R とする半円を，$\mathrm{Re}(z) > 0$ の範囲で描く．ただし，R は十分に大きい ($R \to +\infty$) ものとする．

(2) 虚軸上に，p_n を中心とし，半径を ρ_n とする小半円を，実軸が正となる範囲で描く．ただし，ρ_n は十分に小さい ($\rho_n \to +0$) ものとする．

(3) 半円の端点どうしは線分で結ぶ．

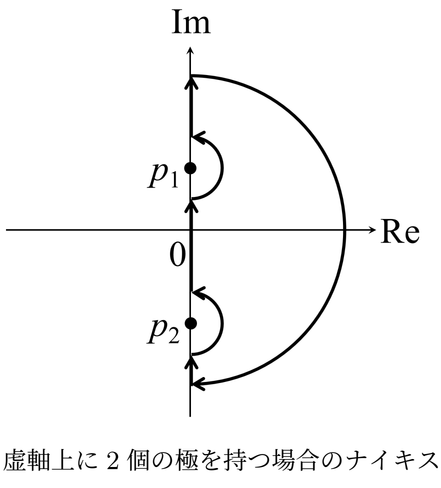


図 2　虚軸上に 2 個の極を持つ場合のナイキスト経路

(数学 IV・D —京大作問サークル・Proxima Technology 杯— 第 4 問は次ページに続く．)

ナイキスト軌跡と制御器の安定性について，以下が知られている．

ナイキストの安定判別法

複素数 s がナイキスト経路を動く際，一巡伝達関数 $F(s)$ が動く軌跡を**ナイキスト軌跡**という．ナイキスト軌跡が点 $-1 \in \mathbb{C}$ のまわりを反時計回りにまわる回数が，ナイキスト経路内に含まれる一巡伝達関数の極の個数と等しい，またそのときに限り，この制御系は安定となる．

そこで，この宇宙船の制御系のナイキスト軌跡を求めてみよう．一巡伝達関数 $F(s)$ に $s = j\omega$ $(\omega \in \mathbb{R})$ を代入し，実部と虚部の挙動を確認する．

まず，$\omega \to +\infty$ のとき，各 $F(j\omega)$ は実部，虚部がともに 0 に収束する．一方で $\omega \to +0$ のときは

- 正の無限大に発散する
- 負の無限大に発散する
- 有限の値に収束する

のいずれの挙動も示す可能性がある．

$F(s)$ のナイキスト軌跡は，以下の手順で概形を得ることができる．

ナイキスト軌跡の概形の作図

1. $F(j\omega)$ の実部 (虚部) の値が 0 となるような実数 ω が存在するとき，ナイキスト軌跡は虚軸 (実軸) と交点を持つ．この交点を取る．
2. 十分小さい実数 $\omega_0 > 0$ と，十分大きい実数 $\omega_1 > 0$ を適当に取り，点 $F(j\omega_0)$，$F(j\omega_1)$ を取る．
3. $F(j\omega)$ が動く点のうち，手順 1．と手順 2．で得た点を，ω が小さいほうから順に滑らかに結ぶ．これにより $0 < \omega < +\infty$ におけるナイキスト軌跡の概形を得る．
4. 手順 3. で得たものを実軸に関して対称移動する．これにより $\omega \neq 0$ におけるナイキスト軌跡を得る．
5. 最後に，$F(-j\omega_0)$ から $F(j\omega_0)$ の点に向けて円弧でつなぐと，ナイキスト軌跡が完成する．

この制御系における一巡伝達関数のナイキスト軌跡が虚軸と交わるような ω に対して

$$\omega^2 = \frac{\boxed{\text{ヌ}}\,M}{\boxed{\text{ネノ}}\,M + \boxed{\text{ハ}}}$$

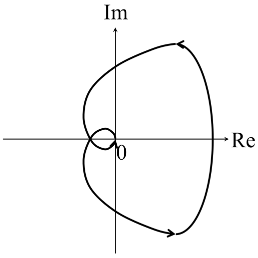
が成り立つ．また，ナイキスト軌跡が実軸と交わるような ω に対して

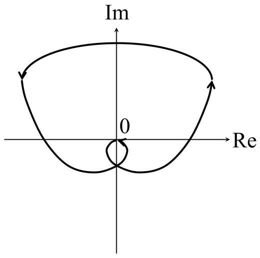
$$\omega^2 = \frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}} + \frac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}\,M}$$

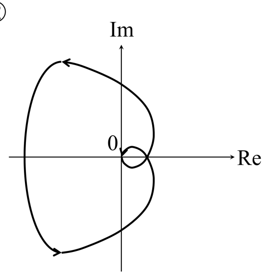
が成り立つ．

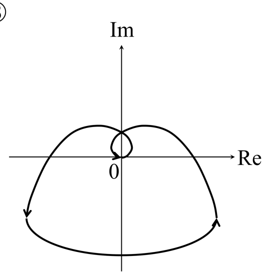
(**数学 IV・D —京大作問サークル・Proxima Technology 杯— 第 4 問は次ページに続く．**)

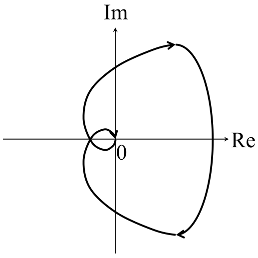
これらのことを踏まえると，以下に示した図のうち，この制御系におけるナイキスト軌跡として相応しい図は $\boxed{\text{マ}}$ である．ただし下図において，この制御系におけるナイキスト軌跡の自己交差に関してのみ正確に図示している．

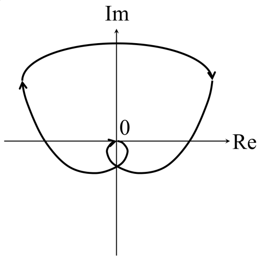
⓪


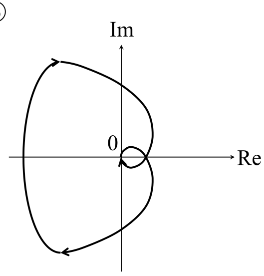
①


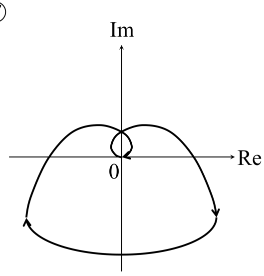
②


③


④


⑤


⑥


⑦


ナイキストの安定判別法を用いれば，この制御系が安定動作するためには，この制御系に用いられている制御器 $C(s)$ において，定数 K が

$$0<K<\frac{\boxed{\text{ミム}}}{\boxed{\text{メ}}}\left(M+\frac{\boxed{\text{モ}}}{\boxed{\text{ヤユ}}}\right)\left(M+\frac{\boxed{\text{ヨ}}}{\boxed{\text{ラリ}}}\right)\left(M+\frac{\boxed{\text{ルレ}}}{\boxed{\text{ロワ}}}\right)^{-1}$$

を満たさなければならないのである．ただし，$\dfrac{\boxed{\text{モ}}}{\boxed{\text{ヤユ}}}<\dfrac{\boxed{\text{ヨ}}}{\boxed{\text{ラリ}}}$ とする．上式から，十分大きい M に対して ($M\to\infty$ の場合に)，十分広い範囲の K に対して宇宙船は安定動作可能であるが，コスト面での問題が発生する．また，

$$K_{\mathrm{M}}:=\frac{\boxed{\text{ミム}}}{\boxed{\text{メ}}}\left(M+\frac{\boxed{\text{モ}}}{\boxed{\text{ヤユ}}}\right)\left(M+\frac{\boxed{\text{ヨ}}}{\boxed{\text{ラリ}}}\right)\left(M+\frac{\boxed{\text{ルレ}}}{\boxed{\text{ロワ}}}\right)^{-1}$$

とおくと，すべての $M>0$ で $K_{\mathrm{M}}>r$ を満たす最大の実数を r とすると，

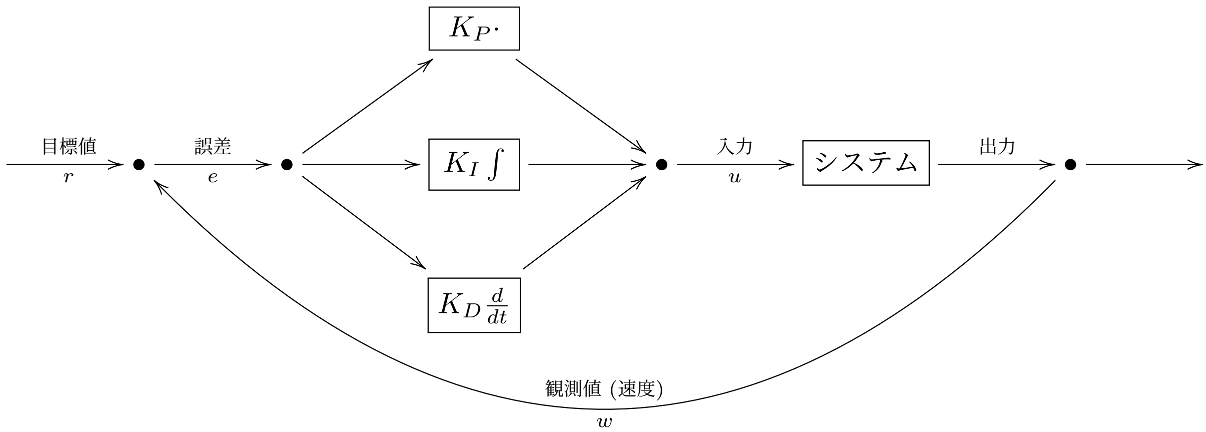
$$r=\frac{\boxed{\text{ヲ}}}{\boxed{\text{ン}}}$$

である．よって，$0<K\leqq r$ を満たすように K を設定すれば，宇宙船が暴走しないようにすることが可能となる．

(数学 IV・D —京大作問サークル・Proxima Technology 杯— 第 4 問は次ページに続く．)

第 4 問の補足

■**補足** 4.1 (PID **制御**)　入力を受け取り，それに応じて何らかの出力を生成する対象のことを **システム** という．たとえば，ロボット，自動車，空調機などがある．制御工学は，あるシステムの挙動を望み通りに動かすための制御について論じる学問であるといえる．制御方式については様々なものがあるが，本問では PID 制御と呼ばれる制御方式を考えている．その一連の流れを図で表したものは，以下のようになる．



P，I，D とは，比例 (Proportional)，積分 (Integral)，微分 (Differentiation) の 3 つの頭文字を取ったものを表し，K_P，K_I，K_D はそれぞれ実定数である．時刻 t における速度 $w(t)$ と目標値 $r(t)$ の誤差 $e(t) := y(t) - r(t)$ に応じて，制御対象であるシステムに入力 $u(t)$ は次のように与えられる:

$$u(t) := K_P \cdot e(t) + K_I \int_0^t e(\tau)\,d\tau + K_D \frac{de}{dt}(t).$$

■**補足** 4.2 (**有界入力有界出力安定**)　任意の有界入力 $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ に対して，出力 $w : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ もまた有界であるとき，そのシステムは**有界入力有界出力安定**であるという．