

2025 年度 共通テスト風模試 数学 IV・D

— 京都大学作問サークル・Proxima Technology 杯 —
解答・解説

目次

I	Introduction	3
II	協力	4
2.1	京都大学作問サークル	4
2.2	株式会社 Proxima Techonology 様	4
III	正答表	5
IV	第 1 問解答	6
4.1	アイ	6
4.2	ウ, エ, オ, カ	6
4.3	キ, ク, ケ, コ	6
4.4	サ, シ, ス	6
4.5	セソ, タチ	7
4.6	ツテ, トナ	7
4.7	ニ	7
4.8	ヌ, ネノハ	7
4.9	ヒフヘ	9
4.10	ホ	10
4.11	マミ, ムメ	11
4.12	モ	11
4.13	ヤユヨ, ラリルレ	11
4.14	ロワヲン	12
V	第 2 問解答	13



数学Ⅳ・D —京都大学作問サークル・Proxima Technology 杯—

5.1	ア～キ	13
5.2	ク, ケ, コ	13
5.3	サ	13
5.4	シス, セ, ソタ	13
5.5	チ, ツ, テ	14
5.6	ト, ナ	14
5.7	ニ～ヒ	15
5.8	フ～ミ	16
5.9	ム～ユ	17
VI	第3問解答	19
6.1	ア, イウ	19
6.2	エ, オ, カ	19
6.3	キ, ク	19
6.4	ケコ, サシスセソタチツテトナニ	20
6.5	ヌネ	20
6.6	ノ, ハ, ヒフ, ヘ	21
6.7	ホ, マ	21
6.8	ミム	22
6.9	メ, モ, ヤユ, ヨ	22
6.10	ラ, リ, ル, レ, ロ, ワ, ヲン	23
6.11	(コラム1) ガンマ関数を利用した別解	24
6.12	(コラム2) 出題背景	25
VII	第4問解答	26
7.1	ア～キ	26
7.2	ク, ケ, コ, サ	26
7.3	シ, ス, セソ, タチ, ツ, テ	27
7.4	ト, ナ	29
7.5	ニ	29
7.6	ヌ, ネノ, ハ, ヒ, フ, ヘ, ホ	29
7.7	マ	30
7.8	ミム, メ, モ, ヤユ, ヨ, ラリ, ルレ, ロワ	31
7.9	ヲ, ン	32
VIII	Web ページ掲載用問題 (by Shakayami)	33



数学 IV・D —京都大学作問サークル・Proxima Technology 杯—

I Introduction

2025 年 9 月 1 日から 9 月 6 日にかけて開催された「[数学 IV・D — 京都大学作問サークル・Proxima Technology 杯 —](#)」の解答を掲載いたします。

数学 IV・D の解答ページや応募ページは, Proxima Technology 様のプラットフォーム上にて公開されました。

本企画は, 株式会社 Proxima Technology 様とのコラボ企画として実施されています。数学コンテスト「Online Math Contest — Proxima Technology 杯」の予選解答ページを体験できるものとして開催されました。

ぜひ, この機会に本編の予選コンテストにもご参加いただき, お楽しみください!

— OnlineMathContest – Proxima Technology 杯 —

- 申し込みページ : <https://math-contest.proxima-ai-tech.com/>
- 申し込み締め切り : 9/18(木)
- 予選 : 9/20 (土), 本選 : 11/29 (土)



II 協力

2.1 京都大学作問サークル

- 企画: Lim_Rim_
- 宣伝: いのっち
- 校正: びゃっこ
- コラボページ例題: Shakayami
- Web テスト : kzy, long, Hans, 艸
- tester: Lim_Rim_, Shakayami, Half, 十二夜咲夜, びゃっこ, igma, 世界システム, とろぴりうむ, ipha, szlt, うだ, へ, Furina, ゴルタクスゼイアン, さとう, ウォン

2.1.1 第1問

- 作問:
 - ipha(確率漸化式パート)
 - U.N.Owen, Lim_Rim_ (うだエスパーパート)
- 解答 : Lim_Rim_, ipha

2.1.2 第2問

- 作問:
 - kzy33550336 (曲率パート)
 - とろぴりうむ (回転数・周回数パート)
- 解答: kzy33550336, とろぴりうむ, Lim_Rim_

2.1.3 第3問

- 作問 : Lim_Rim_
- 解答: Lim_Rim_ , igma,

2.1.4 第4問

- 作問: たつきい
- 解答: たつきい, Lim_Rim_

2.2 株式会社 Proxima Techonology 様

井上亜星様, 長町一平様, 荒牧大輔様には, 第4問の文章確認にご協力いただきました. また, 中村智貴様, 捧隆二様には, 素晴らしいコラボページの作成に多大なるご尽力を賜りました. この場を借りて, サークル一同, 心より御礼申し上げます.



III 正答表

※配点は非公開です。

問題番号	解答記号	正解	問題番号	解答記号	正解
第1問 (50)	アイ	21	第3問 (50)	ア	1
	ウ,エ	1, 1		イ,ウ	3, 2
	オ,カ	2, 1		エ,オ,カ	7, 8, 3
	キ,ク	2, 1		キ	1
	ケ,コ	1, 2		ク	5
	サ,シ,ス	2, 3, 3		ケコ	73
	セソ	84		サシスセソタチツテトナニ	011111101001
	タチ	13		ヌ,ネ	2, 3
	ツテ,トナ	85, 85		ノ,ハ	1, 6
	ニ	8		ヒフ,ヘ	-1, 3
	ヌ	5		ホ,マ	2, 2
	ネノハ	130		ミム	11
	ヒフヘ	299		メ,モ,ヤユ,ヨ	3, 4, 17, 2
	ホ	0		ラ,リ	2, 2
	マミ,ムメ	29, 87		ル,レ,ロ	2, 2, 2
	モ	1		ワ,ラン	7, 12
	ヤユヨ	123	第4問 (50)	ア,イ,ウ,エ	1, 8, 0, 3
第2問 (50)	ラリルレ	2006		オ,カ,キ	0, 4, 7
	ロワラン	2024		ク	6
	ア	1		ケ	7
	イウエ,オカ	335, 27		コ,サ	20
	キ	8		シ,ス	4, 1
	ク,ケ	1, 0		セソ,タチ,ツ,テ	20, 13, 8, 2
	コ	1		ト,ナ	2, 3
	サ	1		ニ	1
	シス,セ,ソタ	17, 4, 17		ヌ,ネノ,ハ	2, 33, 8
	チ,ツ,テ	1, 1, 0		ヒ,フ,ヘ,ホ	3, 4, 2, 5
	ト	0		マ	4
	ナ	2		ミム,メ	15, 4
	ニ	0		モ,ヤユ	8, 15
	ヌ,ネ	1, 2		ヨ,ラリ	8, 13
	ノ	1		ルレ,ロワ	32, 65
	ハ,ヒ	1,2		ワ,ン	5, 2
	フ,ヘ	1, 2	(注) 得点は第1問～第4問の点数の合計です。		
	ホ	7			
	マ,ミ	1, 0			
	ム,メ,モ,ヤ,ユ	0,1,5,9,3			



IV 第 1 問解答

4.1 アイ

アイ : 21

条件を満たさない文字列は $3 \cdot 2 = 6$ 通りなので, 余事象を考えて,

$$a_3 = 3^3 - 6 = 21.$$

4.2 ウ, エ, オ, カ

ウ : 1 エ : 1 オ : 2 カ : 1

条件を満たす長さ n の文字列に末尾の文字と同じ文字を加えてできる文字列は条件を満たすので,

$$b_{n+1} = b_n + c_n.$$

条件を満たす長さ n の文字列であって, 末尾の 2 文字が一致する場合はそれと異なる文字を加えた文字列が, 一致しない場合も末尾 2 文字と異なる文字を加えた文字列が条件を満たすので,

$$c_{n+1} = 2b_n + c_n.$$

4.3 キ, ク, ケ, コ

キ : 2 ク : 1 ケ : 1 コ : 2

$a_n = b_n + c_n$, $b_{n+1} = a_n$ に注意すると,

$$a_{n+2} = b_{n+2} + c_{n+2} = 2(b_{n+1} + c_{n+1}) + b_{n+1} = 2a_{n+1} + a_n.$$

a_n の特性方程式は

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

であり, この解は $x = 1 \pm \sqrt{2}$. よって,

$$\alpha = 1 + \sqrt{2}, \quad \beta = 1 - \sqrt{2}.$$

4.4 サ, シ, ス

サ : 2 シ : 3 ス : 3

漸化式より,

$$\begin{aligned} a_1 &= 3, & a_2 &= 9, \\ a_{n+2} - \alpha a_{n+1} &= \beta (a_{n+1} - \alpha a_n), \\ a_{n+2} - \beta a_{n+1} &= \alpha (a_{n+1} - \beta a_n) \end{aligned}$$

が成り立つので,

$$a_{n+1} - \beta a_n = \alpha^{n-1} (a_2 - \beta a_1) = \alpha^{n-1} (6 + 3\sqrt{2}) = 3\sqrt{2} \alpha^n,$$



数学Ⅳ・D —京都大学作問サークル・Proxima Technology 杯—

同様にして, $a_{n+1} - \alpha a_n = -3\sqrt{2}\beta^n$ となる. よって,

$$a_n = \frac{3\sqrt{2}(\alpha^n + \beta^n)}{\alpha - \beta} = \frac{1}{2}(3\alpha^n + 3\beta^n).$$

4.5 セソ, タチ

セソ : 84 タチ : 13

$2x \equiv 168 \pmod{167}, \quad 1 \leq x \leq 166$ より, $x = \mathbf{84}$.

$$x^2 - 169 \equiv (x+13)(x-13) \equiv 0 \pmod{167}, \quad 1 \leq x \leq \frac{167}{2}$$

より, $x = \mathbf{13}$.

4.6 ツテ, トナ

ツテ : 85 トナ : 85

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(3\alpha^n - 3\beta^n) &\equiv 84(3 \cdot 14^n - 3 \cdot (-12)^n) \\ &\equiv 252(14^n - (-12)^n) \\ &\equiv \mathbf{85(14^n - (-12)^n)}. \end{aligned}$$

4.7 二

二 : 8

明らかに, $F_{n+2} \equiv F_{n+1} + F_n \pmod{3}$ が成立する. 直接計算していくと, 3 を法として

$$F_1 \equiv 1, \quad F_2 \equiv 1, \quad F_3 \equiv 2, \quad F_4 \equiv 0, \quad F_5 \equiv 2, \quad F_6 \equiv 2, \quad F_7 \equiv 1, \quad F_8 \equiv 0, \quad F_9 \equiv 1, \quad F_{10} \equiv 1$$

であり, $F_1 \equiv F_9, F_2 \equiv F_{10}$ が分かる. $G_n = F_{n+8} - F_n$ とおくと, 漸化式より

$$G_{n+2} = G_{n+1} + G_n, \quad G_1, G_2 \equiv 0 \pmod{3}$$

であるから, 帰納的にすべての正の整数 n について $G_n \equiv 0 \pmod{3}$ が成り立つことが分かる. これは, $F_{n+8} \bmod 3 = F_n \bmod 3$ を意味するので, 8 項ごとに繰り返されていくことが分かる. また, 明らかにこれは最小の周期を定める.

よって求める周期は **8**.

4.8 又, ネノハ

又 : 5 ネノハ : 130

結論 :

又 : X_1, X_2, X_3, X_7, X_8 の **5 個** であるから ⑤ .

ネノハ : $i = 1, 7$ が適するから, 解答するべきは $2^1 + 2^7 = \mathbf{130}$.

以下, このことを確認する.



数学 IV・D —京都大学作問サークル・Proxima Technology 杯—

■加法・乗法が閉じているか?

- (1) 適する. X_1 について, 有理数の和, 積はまた有理数だからよい.
- (2) 適する. X_2 について, 整数の和, 積はまた整数だからよい.
- (3) 適する. X_3 について, 非負実数の和, 積はまた非負実数だからよい.
- (4) 適さない. X_4 について, $1 \in X_4$ と自身の和は 2 であり, 絶対値が 0,1 ではない. したがって, X_4 は和で閉じていない.
- (5) 適さない. 実際, $s_1 = \pi$, $s_2 = \sqrt{2} - \pi$ が反例となることを示そう. まず, $s_1 + s_2 = \sqrt{2}$ であり, 有理数ではない. 一方, $\sqrt{2}$ は有理数係数多項式 $X^2 - 2$ の根であるから, これは超越数でもない. よって $s_1 + s_2 \notin X_3$ である. 一方で, $s_1 = \pi$ は超越数だから $s_1 \in X_5$ である. また, s_2 も超越数である. 実際, ある零でない有理数係数多項式 $P(X) := \sum_{n=0}^d a_n X^n$ が $P(s_2) = 0$ を満たすと仮定すると,

$$\sum_{n=0}^d a_n (\pi - \sqrt{2})^n = 0$$

となる. $\sqrt{2}$ が掛かる部分とそれ以外で分けることで, ある有理数係数多項式 $P_1(X), P_2(X)$ が存在して

$$P_1(\pi) + P_2(\pi)\sqrt{2} = 0$$

となることが分かる. また, π^d の部分を見ることで, P_1, P_2 のいずれか一方は零多項式でないことがわかる.

上の等式から

$$P_1(\pi)^2 = 2P_2(\pi)^2$$

を得るので, $Q(X) = P_1(X)^2 - 2P_2(X)^2$ という有理数係数多項式によって $Q(\pi) = 0$ となる. よって超越数の定義から $Q(X)$ は零多項式でなければならない. ところが, 多項式 $Q(X)$ がすべての有理数 x に対して $Q(x) = 0$ を満たすことから, 有理数 $P_1(x), P_2(x)$ は $P_1(x)^2 = 2P_2(x)^2$ を満たす. $\sqrt{2}$ は無理数なので, $P_1(x), P_2(x) = 0$ でなければならない. これは, $P_1(X), P_2(X)$ が零多項式であることを導くが, これは, 矛盾である. よって, X_5 は和で閉じていない.

- (6) 適さない. 実際, $\sqrt[3]{2}$ と自身の積である $\sqrt[3]{4}$ が X_6 に属さないことを示す. 実際, もし属するら, ある有理数 a, b が存在して $\sqrt[3]{4} = a\sqrt[3]{2} + b$ となる. そこで, $f(X) = X^3 - aX - b$ とおくと, $f(\sqrt[3]{2}) = 0$ となる. ここで, 多項式 $X^3 - 2$ を $f(X)$ で割った余りを $R(X)$ とするとき, $R(X)$ は X に関する 1 次以下の有理数係数多項式である. これが $r_1X + r_2$ と書けたとすると, $r_1\sqrt[3]{2} + r_2 = 0$ となる. $\sqrt[3]{2}$ は無理数なので, $r_1 = r_2 = 0$ でなければならない. これは, $f(X)$ が $X^3 - 2$ を割り切るということを導く. よって,

$$(X^3 - aX - b)(cX - d) = X^3 - 2$$

を満たす有理数 c, d ($c \neq 0$) が存在する. よって, $X^3 - 2$ には 2 つの実根 $\sqrt[3]{2}, d/c$ が存在するが, これは矛盾である. 実際, $(X^3 - 2)' = 3X^2 \geq 0$ (等号成立 $X = 0$) により, 実関数とみた $X^3 - 2$ は狭義単調増加であるためである. よって, X_6 は積で閉じていない.

- (7) 適する. まず, X を変数とする有理数係数多項式の集合 $\mathbb{Q}[X]$ は, 多項式の和, 積に関して閉じている. X_7 は, $\mathbb{Q}[X]$ の各要素に ω を代入して得られる値をすべて集めた集合として見るこ



数学 IV・D —京都大学作問サークル・Proxima Technology 杯—

ができる. よって, X_7 の二つの要素の和, 積は ω の多項式として書くことができるため, X_7 は和・積で閉じている.

(8) 適する. これは X_7 と同様の議論から導かれる.

■条件 (a), (b) を満たすか? $i \in \{0, 1, 2, 5, 6, 7\}$ とする. $x \in X_i$ に対して, $-x$ と x^{-1} ($x \neq 0$) がまた X_i に属すかどうかを論じる.

(0) 適する. 実際, 有理数を -1 倍したものや, 0 でない有理数の逆数もまた有理数である.

(1) 適さない. 実際, $2 \in X_1$ だが, $2^{-1} \notin X_2$ である.

(2) 適さない. 実際, $1 \in X_2$ だが $m-1 \notin X_1$ である.

(6) 適する. $x = a + b\omega + c\omega^2 \neq 0$ を任意にとる. このとき, 係数がすべて有理数である多項式

$$f(X) = a + bX + cX^2$$

に対し, ω は 1 の 3 乗根なので $f(\omega) = x \neq 0$ である. 構成より $f(\omega) \neq 0$ であるから, $f(X)$ と $X^2 + X + 1$ は最大公約多項式が 1 である. 従って Euclid の互除法を用いて有理係数多項式 $u(X), v(X) \in \mathbb{Q}[X]$ が存在し,

$$u(X)f(X) + v(X)(X^2 + X + 1) = 1$$

を満たす. これを $X = \omega$ に代入すると,

$$u(\omega)f(\omega) + v(\omega)(\omega^2 + \omega + 1) = u(\omega)x + v(\omega) \cdot 0 = 1,$$

したがって

$$u(\omega)x = 1, \quad x^{-1} = u(\omega).$$

ところで $u(X) \in \mathbb{Q}[X]$ であるから, $u(\omega) \in X_6$ である. ゆえに $x^{-1} \in X_6$ である. 以上より, X_6 上の任意の非零元は逆元を持つ.

(7) 適さない. 実際, $\pi \in X_7$ だが, $1/\pi \notin X_7$ である. なぜならば, もし $1/\pi = \sum_{i=0}^n a_i \pi^i$ を満たす有理数 $a_0, \dots, a_n$ ($n \geq 0$) が存在するならば m

$$\sum_{i=0}^n a_i \pi^{i+1} - 1 = 0$$

となるので, 有理数係数多項式

$$P(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^{i+1} - 1$$

は $P(\pi) = 0$ を満たすことになる. $P(0) = -1$ より $P(X)$ は零多項式ではないので, これは π が超越数であることに反する.

4.9 ヒフヘ

ヒフヘ : 299

まず, 条件 (Q) は 任意の整数 s に対して $s^2 - t$ が p の倍数ではないという条件なので, $t \bmod p$ が平方非剰余であるという意味である. したがって, $t = 2, 5$ がともに (Q) を満たすには

$$p \nmid 10, \quad \left(\frac{2}{p}\right) = -1, \quad \left(\frac{5}{p}\right) = -1$$



数学 IV・D —京都大学作問サークル・Proxima Technology 杯—

を満たす必要がある．ここで，平方剰余の第二補充則から

$$\left(\frac{2}{p}\right) = \begin{cases} 1 & (p \equiv 1, 7 \pmod{8}) \\ -1 & (p \equiv 3, 5 \pmod{8}) \end{cases}$$

であるから $p \equiv 3, 5 \pmod{8}$ である．また，平方剰余の相互法則から

$$\left(\frac{5}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{5-1}{2}} \left(\frac{p}{5}\right) = \left(\frac{p}{5}\right) = \begin{cases} 1 & (p \equiv 1, 4 \pmod{5}) \\ -1 & (p \equiv 2, 3 \pmod{5}) \end{cases}$$

となるので， $p \equiv 2, 3 \pmod{5}$ である．したがって，条件を満たすことは， p を 40 で割った余りが 3, 27, 13, 37 のいずれかであることと同値である．

$p \leq 100$ だから，これまでの議論により

$$p = 3, 13, 37, 43, 53, 67, 83$$

である．したがって，これらの総和は

$$3 + 13 + 37 + 43 + 53 + 67 + 83 = 299$$

となる．

4.10 ホ

ホ：①

以下，①のみが正しいことを確認する．

- ① この選択肢が正しいことを見る．関数 $f_p : \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1, \dots, p-1\}$ は，整数 n に対して n を p で割った余りを返す関数であるとする．まず， ϕ の定義より $\phi(ax+b) \in L$ である． $P(x)$ を $x^2 - t$ で割った余りを $ax+b$ としたとき，ある整数係数多項式 $R(x)$ ， $ax+b$ によって $P(x) = (x^2 - t)R(x) + ax + b$ と表せるが，このとき

$$P(x) - (f_p(a)x + f_p(b)) = (x^2 - t)R(x) + p \left(\frac{a - f_p(a)}{p}x + \frac{b - f_p(b)}{p} \right)$$

である． f_p の定義から， $\frac{a - f_p(a)}{p}x + \frac{b - f_p(b)}{p}$ は整数係数多項式である．よって，上記の等式は

$$P(x) \equiv f_p(a)x + f_p(b) = \phi(ax+b) \pmod{p, x^2 - t}$$

を導くため，正しい．

- ① この選択肢は正しくない．実際， $-p < t \leq 0$ のもとで $P(x) = x^2 - t$ とすると， $\phi(x^2 - t) = x^2 + (p-t)$ であるから， $P(x) = x^2 - t$ を $\phi(x^2 - t)$ で割った余りは $-p$ となる．これは L に属さない． $f_{p^2}(P(x))$ は定義より L に属するように定めるべきであるから，文章と整合しない．
- ② この選択肢は正しくない．実際， $P(x) = (p-1)x^2$ としたとき， $\phi(P(x)) = P(x)$ であり， $\phi(P(x))$ を $x^2 - t$ で割った余りは $(p-1)t$ となる．これは集合 L に属さない．実際もし属するならば， $0 \leq (p-1)t \leq p-1$ である必要があるが，これは $t = 0, 1$ を導く．よって条件 (Q) に反するため， $(p-1)t \notin L$ となる．よって①と同様の理由から，文章と整合しない．



数学 IV・D —京都大学作問サークル・Proxima Technology 杯—

4.11 マミ, ムメ

まず,

$$(100x + 3) \times_L (100x - 3) = \phi(100^2 \cdot 2 - 3^2) = \phi((-1)^2 \cdot 2 - 3^2) = \phi(-7) = 94$$

であるから, $\phi(94N) = 1$ となる整数 $N \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ を取れば,

$$(100x + 3) \times_L ((100x - 3) \times_L N) = ((100x + 3) \times_L (100x - 3)) \times_L N = \phi(94N) = 1$$

となるので, $\phi(100Nx - 3N)$ を解答すればよい. ここで, N の値は $N = \frac{5 \cdot 101 - 1}{7} = \frac{504}{7} = 72$ である. 実際,

$$\phi(94N) = \phi(-7N) = \phi(1 - 5 \cdot 101) = 1$$

である. よって

$$\phi(100Nx - 3N) = \phi(-Nx - 216) = (101 - 72)x + (303 - 216) = \mathbf{29x + 87}$$

である.

4.12 モ

モ : ① Fermat の小定理と二項係数 $\binom{p}{i}$ が $1 \leq i \leq p-1$ において p で割り切れることから

$$(ax + b)^p = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} a^i b^{p-i} x^i \equiv a^p x^p + b^p \equiv ax^p + b \equiv at^{(p-1)/2}x + b \pmod{p, x^2 - t}$$

となる. ここで, Euler の規準と条件 (Q) より

$$t^{(p-1)/2} = \left(\frac{t}{p}\right) = -1$$

である. よって

$$(ax + b)^p \equiv -\mathbf{ax + b} \pmod{p, x^2 - t}$$

4.13 ヤユヨ, ラリルレ

ヤユヨ : 123 ラリルレ : 2006

$|L| = 2027^2$ を満たす有限体 (L, a_L, m_L) は, 問題文で $t = 2$ とすることで構成されるようなものとする. なお, $t = 2$ は条件 (Q) を満たすことに注意する. 実際, 平方剰余の第二補充則から

$$\left(\frac{2}{2027}\right) = (-1)^{\frac{2027^2-1}{8}} = -1$$

であることから, $2 \pmod{2027}$ は非平方剰余である. この有限体において, $x \in L$ の二乗は $x^2 = 2$ である.

漸化式 $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$, $a_1 = 3, a_2 = 9$ を L の中で解いてみよう. 特性方程式の根は $-1 \pm \sqrt{2}$ であったから,

$$\alpha = 1 + x, \quad \beta = 1 + (p-1)x$$



数学Ⅳ・D —京都大学作問サークル・Proxima Technology 杯—

と置く。と拡張されたフェルマーの小定理により、 $\alpha^n, \beta^n \in L$ の周期は $p^2 - 1$ を割り切ることが保証されるから、すべての整数 k に対して

$$a_{p^2-1+k} \equiv a_k \pmod{p, x^2 - 2}$$

であることが分かる。両辺は整数値であるから、

$$a_{p^2-1+k} \equiv a_k \pmod{p}$$

も満たす。これを適用することで、 p を法として $a_{p^2+4} \equiv a_5$, $a_{p^2-4} \equiv a_{-3}$ であることが分かる。各右辺を計算すると、以下の通り。

- ヤユヨ : a_5 について、これは漸化式から計算すれば得られる。実際、 $a_4 = 2 \cdot 21 + 9 = 51$ より、 $a_5 = 2 \cdot 51 + 21 = \mathbf{123}$ となる。
- ラリルレ : a_{-3} については、漸化式を利用して初項から逆にたどることで求められる。実際、 $a_{n-1} = a_{n+1} - 2a_n$ であるから、

$$\begin{aligned} a_0 &= a_2 - 2a_1 = 9 - 2 \cdot 3 = 3 \\ a_{-1} &= a_1 - 2a_0 = 2 - 2 \cdot 3 = -3, \\ a_{-2} &= a_0 - 2a_{-1} = 9 \\ a_{-3} &= a_{-1} - 2a_{-2} = -3 - 18 = -21 \end{aligned}$$

となる。よって、 $a_{p^2-4} \equiv -21 \equiv \mathbf{2006}$ 。

4.14 ロワラン

ロワラン : 2024

$a_{2029} = a_{p+2}$ について、これは二項定理を利用することで求まることを見る。まず、

$$\begin{aligned} a_{p+2} &= \frac{3}{2}(\alpha^{p+2} + \beta^{p+2}) \\ &= 3 \sum_{\substack{k=0 \\ k:\text{even}}}^{p+2} \binom{p+2}{k} \sqrt{2}^k \end{aligned}$$

である。 $\binom{p+2}{k}$ が p の倍数でないような偶数 k ($0 \leq k \leq p+2$) は $k = 0, 2, p+1$ に限られることが分かるから、上記の総和の $\text{mod } p$ はこれらの項の寄与のみ見ればよい。したがって、

$$\begin{aligned} 3 \sum_{\substack{k=0 \\ k:\text{even}}}^{p+2} \binom{2p}{k} \sqrt{2}^k &\equiv 3 \left(1 + \binom{p+2}{2} \sqrt{2}^2 + \binom{p+2}{p+1} \sqrt{2}^{p+1} \right) \\ &\equiv 3 \left(1 + (p+2)(p+1) + (p+2) \cdot 2^{\frac{p+1}{2}} \right) \\ &\equiv 3(1 + 2 + 4 \cdot 2^{\frac{p-1}{2}}) \\ &\equiv 3 \left(3 + 4 \binom{2}{p} \right) && (\because \text{Euler 規準}) \\ &\equiv 3(3 + 4(-1)) && (\because \text{平方剰余第二補充則}) \\ &\equiv -3 \\ &\equiv \mathbf{2024}. \end{aligned}$$

となる。



V 第2問解答

5.1 ア～キ

ア：① イウエ：335 オカ：27 キ：8

$(x(t), y(t))$ ($p \leq t \leq q$) と媒介変数表示された曲線の長さは

$$\int_p^q \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_0^q \|c'(t)\| dt$$

である. $y = x\sqrt{x}$ の場合,

$$\int_0^5 \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1} dx = \int_0^5 \sqrt{\frac{9}{4}x + 1} dx = \left[\frac{1}{27}(9x + 4)^{\frac{3}{2}} \right]_0^5 = \frac{335}{27}$$

であり, $(x(t), y(t)) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) の場合,

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + (\sin t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t} dt = \int_0^{2\pi} 2 \sin \frac{t}{2} dt = \left[-4 \cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = 8$$

5.2 ク, ケ, コ

ク：1 ケ：0 コ：①

性質 A の 2 つ目の条件から, $(x(t), y(t))$ ($p \leq t \leq q$) が弧長パラメータであるとき, $q - p$ がこの曲線の長さに一致する. 今回の曲線 C の長さは π であるので, 選択肢のうち ①, ② はこの条件に合わない. また, ③ は $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ の部分の長さが $\frac{\pi}{4}$ であるので合わない. よってク：① であり, その基点は $(x(0), y(0)) = (1, 0)$ である.

5.3 サ

サ：①

問題文に与えられた等式

$$\int_0^r \|c'(t)\| dt = r$$

を r について微分することで, $\|c'(r)\| = 1$ を得る. 逆に, 任意の $0 \leq t \leq \ell$ に対し $\|c'(t)\| = 1$ であれば, 上式が成り立つことが確かめられる.

5.4 シス, セ, ソタ

シス：17 セ：4 ソタ：17

曲線 C のパラメータ $c(t) = (t, 4t + 3)$ ($0 \leq t \leq 4$) の $t = 0$ から $t = x$ までの長さ $s(x)$ は, 三平方の定理より,

$$s(x) = \sqrt{(x - 0)^2 + (4x + 3 - 3)^2} = \sqrt{17}x \quad (0 \leq x \leq 4)$$

であり, その逆関数 $r(t)$ は,

$$r(t) = \frac{t}{\sqrt{17}} \quad (0 \leq t \leq 4\sqrt{17})$$



数学Ⅳ・D —京都大学作問サークル・Proxima Technology 杯—

で与えられる. よって, 弧長パラメータは,

$$\gamma(t) = c(r(t)) = \left(\frac{t}{\sqrt{17}}, \frac{4t}{\sqrt{17}} + 3 \right) \quad (0 \leq t \leq 4\sqrt{17})$$

5.5 チ, ツ, テ

チ:1 ツ:1 テ:0

$T(s)$ は $(x(s), y(s))$ の速度ベクトルであり, $(x(s), y(s))$ が弧長パラメータであることから,

$$\|\mathbf{n}(s)\| = \|\gamma'(s)\| = 1, \quad \|T(s)\|^2 = (x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1$$

この式の両辺を微分することで,

$$\langle T(s), T'(s) \rangle = \frac{1}{2} \left((x'(s))^2 + (y'(s))^2 \right)' = 0$$

5.6 ト, ナ

ト:0 ナ:②

$y = 3x$ ($0 \leq x \leq 2$) の $(0, 0)$ を基点とする弧長パラメータは,

$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{t}{\sqrt{10}}, \frac{3t}{\sqrt{10}} \right)$$

で与えられ,

$$T(s) = (x'(s), y'(s)) = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}} \right), \quad T'(s) = (0, 0)$$

よって, $T'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$ より任意の s について $\kappa(s) = 0$ となる.

また, $(x(t), y(t)) = (2 \cos t, 2 \sin t)$ ($-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$) の弧長パラメータは

$$(x(s), y(s)) = \left(2 \cos \frac{s}{2}, 2 \sin \frac{s}{2} \right) \quad (-\pi \leq s \leq \pi)$$

で与えられ,

$$T(s) = (x'(s), y'(s)) = \left(-\sin \frac{s}{2}, \cos \frac{s}{2} \right), \quad T'(s) = \left(-\frac{1}{2} \cos \frac{s}{2}, -\frac{1}{2} \sin \frac{s}{2} \right) \quad (*)$$

$T(s)$ を反時計回りに 90° 回転させたベクトルは

$$\mathbf{n}(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \frac{s}{2} \\ \cos \frac{s}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \frac{s}{2} \\ -\sin \frac{s}{2} \end{pmatrix}$$

であるので^{*1}, (*) と比較することで, $\kappa(s) = \frac{1}{2}$ を得る.

^{*1} 複素数平面上で 90° 回転することは, $i = \sqrt{-1}$ を掛けることとして表せる. だから, $(-\sin(s/2) + i \cos(s/2)) \cdot i = -\cos(s/2) - i \sin(s/2)$ の計算から回転後の座標を計算することもできる.



5.7 ニ～ヒ

二：0 又：1 ネ：2 ノ：1 ハ：1 ヒ：2

1. C_1 の曲率は $\kappa(s) = 0$ であったから $W(C_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\ell 0 ds = 0$. また, C_2 の曲率は $1/2$ であったから, $W(C_2) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{1}{2}$.
2. $c_A : \theta \mapsto ((1 + \cos \theta) \cos \theta, (1 + \cos \theta) \sin \theta)$ が良いパラメータ表示であるような A を決定する.
 $x, y : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$x(\theta) = (1 + A \cos \theta) \cos \theta, \quad y(\theta) = (1 + A \cos \theta) \sin \theta$$

とおく. θ で微分すると

$$x'(\theta) = -\sin \theta - A \sin 2\theta, \quad y'(\theta) = \cos \theta + A \cos 2\theta$$

となる. $x'(\theta), y'(\theta) = 0$ を同時に満たす θ が存在するかを論じればよい. もし存在するならば,

$$\sin \theta = -A \sin 2\theta, \quad \cos \theta = -A \cos 2\theta$$

であるから, 各辺を 2 乗して足し上げることで

$$(1 =) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = (-A \sin 2\theta)^2 + (-A \cos 2\theta)^2 = A^2$$

となる. $A > 0$ としていたから, 存在するためには $A = 1$ が必要である. 実際に $A = 1$ であるとき, $\theta = \pi$ において $x'(\pi), y'(\pi) = 0$ であることが確かめられる. よって $A \neq 1$ であるとき, $c_A(t)$ は良いパラメータ表示である.

以降 $A \neq 1$ とする. $c_A(\theta)$ の各成分を微分して

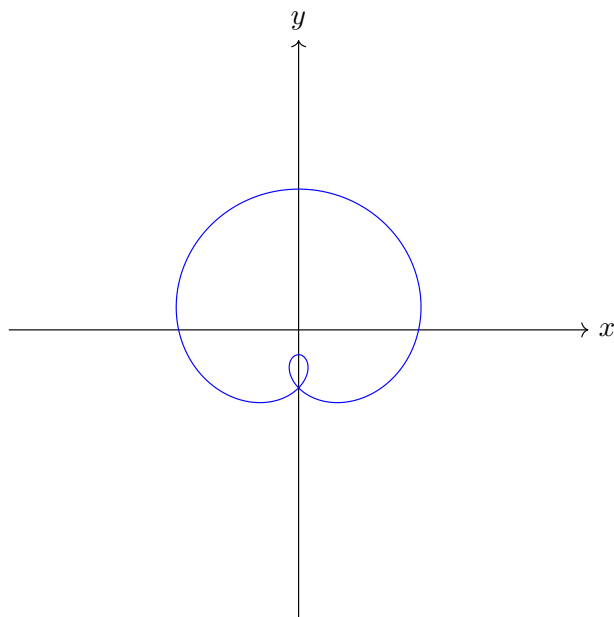
$$c'_A(\theta) = (-\sin \theta - A \sin 2\theta, \cos \theta + A \cos 2\theta)$$

を得る. 弧長パラメータ $\gamma_A : [0, 1] \rightarrow \Gamma_A$ に対して, 方針から定まるように $\gamma_A(s) = c_A(r(s))$ を満たす微分可能な単調増加関数 $r : [0, 1] \rightarrow [0, 2\pi]$ が存在する. $r(s) = \theta$ とおくとき, 合成関数の微分から,

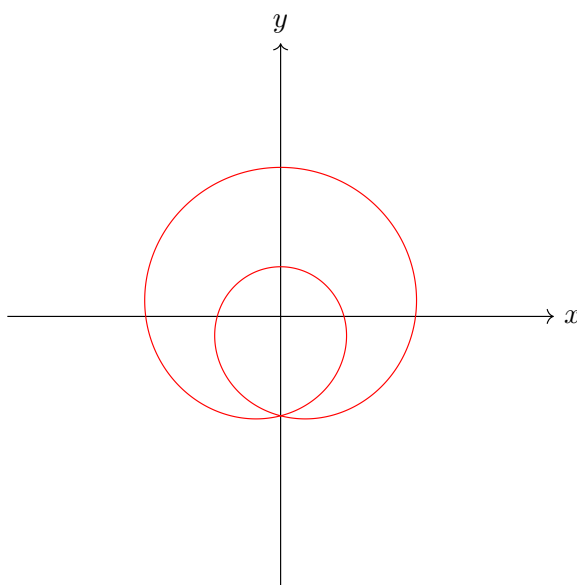
$$\gamma'_A(s) = \frac{dr}{ds}(s) \cdot c'_A(\theta)$$

である. $\frac{dr}{ds}(s) > 0$ であるから, 二つのベクトル $\gamma'_A(s)$ と $c'_A(s)$ が定める方向は同じである. よって, 問題文中のように $T(s) = \gamma'_A(s) = (\cos \alpha(s), \sin \alpha(s))$ と定義される連続な角度関数 $\alpha(s)$ は, $c'_A(\theta)$ が定めるグラフが原点を何回転したかを求めることによって計算可能である. そこで, $c'_A(\theta)$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) の軌跡を図示する.

まず, $0 < A < 1$ の場合は以下のようなになる.



次に, $A > 1$ の場合は以下ようになる:



これにより, $A > 1$ では $\alpha(1) - \alpha(0) = 2 \times 2\pi = 4\pi$ であり, $0 < A < 1$ では $\alpha(1) - \alpha(0) = 2\pi$ である. 以上より,

$$W(\gamma_A) = \begin{cases} 1 & (0 < A < 1) \\ 2 & (1 < A) \end{cases}$$

5.8 フ ∼ ミ

フ : 1 ヘ : 2 ホ : ⑦ マ : 1 ミ : 0

$c'_{a,b}(t) = (-b \sin t, b \cos t)$, $H(t) = \left(-\frac{b \sin t}{a^2 + b^2 + 2ab \cos t}, \frac{a + b \cos t}{a^2 + b^2 + 2ab \cos t} \right)$ であるから

$$\langle c'(t), H(t) \rangle = \frac{b^2 + ab \cos t}{a^2 + b^2 + 2ab \cos t} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2 + 2ab \cos t} \right) \quad (1)$$



数学 IV・D —京都大学作問サークル・Proxima Technology 杯—

非積分関数は $t = \pi$ について対称なので, $x = \tan \frac{t}{2}$ とおくと

$$I_{a,b} = 2 \int_0^\pi \frac{dt}{a^2 + b^2 + 2ab \cos t} = 4 \int_0^\infty \frac{dt}{(a+b)^2 + (a-b)^2 x^2}$$

さらに $x = \frac{a+b}{a-b} \tan u$ と置換することを考える. $a > b$ のときは $u : 0 \rightarrow \pi/2$ と対応させることで,

$$I_{a,b} = 4 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{(a+b)^2 + (a-b)^2 \tan^2 u} \cdot \frac{a+b}{a-b} \right) \frac{du}{\cos^2 u} = \frac{4}{a^2 - b^2} \int_0^{\pi/2} du = \frac{2\pi}{a^2 - b^2}$$

となる. $a < b$ のときは $u : 0 \rightarrow -\pi/2$ と対応させることで, 同様の計算から

$$I_{a,b} = \frac{4}{a^2 - b^2} \int_0^{-\pi/2} du = \frac{2\pi}{b^2 - a^2}$$

となる. 以上の結果は

$$I_{a,b} = \frac{2\pi}{|a^2 - b^2|}$$

とまとめられる. よって, 式 (1) より

$$L(c_{a,b}) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{|a^2 - b^2|} \right) = \begin{cases} 1 & (0 < a < b) \\ 0 & (0 < b < a) \end{cases}$$

5.9 ム ∼ ャ

ム : ① ャ : ① モ : ⑤ ヤ : ⑨ ャ : ③ .

円周 $K_{a,b}$ の巻き数の結果から予測できるように, 点 p の周りを反時計に一周回ると巻き数の値が 1 となる実際, 次が成り立つ.

補題 V.1. 原点を通らない閉曲線 $C \subset \mathbb{R}^2$ の良いパラメータ表示 $c : [p, q] \rightarrow \mathbb{R}^2$ に対して, $L(c)$ は c が原点のまわりを何周したかを表す量である.

証明. 微分可能な関数 $r(t), \theta(t)$ によって $c(t) = (x(t), y(t)) = (r(t) \cos \theta(t), r(t) \sin \theta(t))$ と表したとき, 積の微分, 合成関数の微分などから

$$\begin{aligned} L(c) &= \int_p^q \frac{-y(t)x'(t) + x(t)y'(t)}{\|c(t)\|^2} dt \\ &= \int_p^q \frac{-r(t) \sin \theta(t) \{r'(t) \cos \theta(t) + r(t)(\cos \theta(t))'\} + r(t) \cos \theta(t) \{r'(t) \sin \theta(t) + r(t)(\sin \theta(t))'\}}{r(t)^2} dt \\ &= \int_p^q \frac{r(t)^2 \{-\sin \theta(t)(\cos \theta(t))' + \cos \theta(t)(\sin \theta(t))'\}}{r(t)^2} dt \\ &= \int_p^q \frac{r(t)^2 \{-\sin \theta(t)(\cos \theta(t))' + \cos \theta(t)(\sin \theta(t))'\}}{r(t)^2} dt \\ &= \int_p^q \{-\sin \theta(t)(\cos \theta(t))' + \cos \theta(t)(\sin \theta(t))'\} dt \\ &= \int_p^q \theta'(t) \{\sin^2 \theta(t) + \cos^2 \theta(t)\} dt \end{aligned}$$

数学Ⅳ・D —京都大学作問サークル・Proxima Technology 杯—

$$\begin{aligned}
 &= \int_p^q \theta'(t) dt \\
 &= [\theta(t)]_p^q \\
 &= \theta(q) - \theta(p)
 \end{aligned}$$

となる。これは、始点 $c(p)$ から終点 $c(q)$ までの角度の変化分を表す量である。 □

上よりパラメータ表示の向きを逆転させれば L の値は -1 倍されることもわかる。よって 時計回りに一周回ると巻き数の値が -1 となる。

この結果から、最後の自己交差を持つ曲線 C (パラメータ表示 $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$) によって区切られたそれぞれの領域内に点 p を置いて $\theta(1) - \theta(0)$ を計算すると、

- $\theta(1) - \theta(0) = -4\pi$, すなわち $L_P = -2$ となる領域は存在しない (⑩ の領域).
- $\theta(1) - \theta(0) = -2\pi$, すなわち $L_P = -1$ となる領域は①で示した領域である.
- $\theta(1) - \theta(0) = 0$, すなわち $L_P = 0$ となる領域は⑤で示した領域である,
- $\theta(1) - \theta(0) = 4\pi$, すなわち $L_P = 2$ となる領域は③で示した領域である.
- 残りの領域ではすべて $\theta(1) - \theta(0) = 2\pi$, すなわち $L_P = 1$ となる (⑨ の領域).

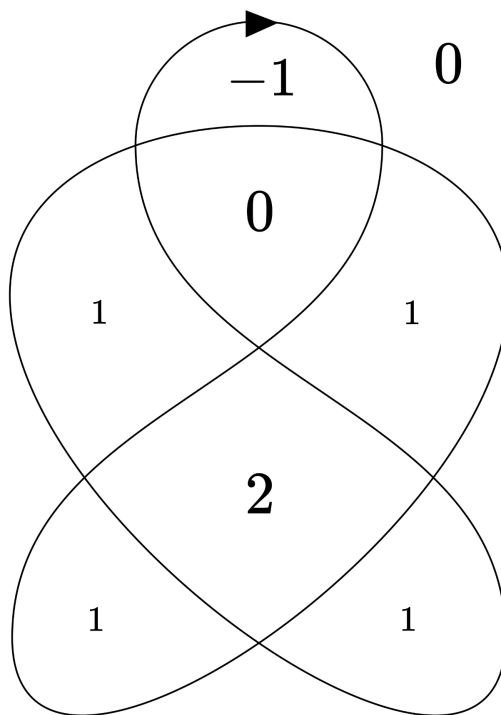


図1 $L_P(c)$ の値



Ⅵ 第3問解答

6.1 ア, イウ

ア : 1 イ : 3 ウ : 2

• ア :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + an + b} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n^{-2}}{1 + an^{-1} + bn^{-2}} = \frac{1 - 0}{1 + 0 + 0} = 1$$

• イウ :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 1} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

6.2 エ, オ, カ

エ : ⑦ オ : ⑧ カ : ③ 部分分数分解により,

$$S_0(\alpha) = \frac{1}{2\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n-\alpha} - \frac{1}{n+\alpha} \right)$$

および

$$S_1(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-\alpha)(n+\alpha+1)} = \frac{1}{2\alpha+1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n-\alpha} - \frac{1}{n+\alpha+1} \right)$$

である. 級数の収束性により, 以下の左辺も収束する級数であり, 項別ごとに計算することで以下を得る:

$$2\alpha S_0(\alpha) - (2\alpha+1)S_1(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+\alpha+1} - \frac{1}{n+\alpha} \right) = -\frac{1}{\alpha+1}.$$

よって

$$(2\alpha)S_0(\alpha) - (2\alpha+1)S_1(\alpha) + \frac{1}{\alpha+1} = 0$$

である.

6.3 キ, ク

キ : ① ク : ⑤

$a = 2A$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+A)^2 + b - A^2} = \sum_{n=A+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - (A^2 - b)} = S_0(\sqrt{A^2 - b}) - \sum_{n=1}^A \frac{1}{n^2 - (A^2 - b)}$$

なので, キ は $A^2 - b$ が該当する.



$a = 2A + 1$ のとき

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n + A + \frac{1}{2})^2 - ((A + \frac{1}{2})^2 - b)} \\ &= \sum_{n=A+1}^{\infty} \frac{1}{(n + \frac{1}{2})^2 - ((A + \frac{1}{2})^2 - b)} \\ &= S_1 \left(\sqrt{\left(\left(A + \frac{1}{2} \right)^2 - b \right)} - \frac{1}{2} \right) - \sum_{n=1}^A \frac{1}{(n + \frac{1}{2})^2 - ((A + \frac{1}{2})^2 - b)} \end{aligned}$$

なので、 κ は $(A + 1/2)^2 - b$ が該当する.

6.4 ケコ, サシスセソタチツテトナニ

ケコ : 73 サシスセソタチツテトナニ : 011111101001

bit 列 B が長さ n であるときに $f_B(x) = \frac{x - k_B}{2^n}$ と表せたとすると, bit 列 $0B, 1B$ に対して

$$f_{0B}(x) = \frac{x - k_B}{2^{n+1}}, \quad f_{1B}(x) = \frac{x - (k_B + 2^n)}{2^{n+1}}$$

だから, $k_{0B} = k_B$, $k_{1B} = k_B + 2^n$ となる. $k_0 = 0$, $k_1 = 1$ であるから, 帰納的に k_B は, B を 2 進法表記された数字とみて, それを 10 進数に表したものになることが分かる.

よって **ケコ** について,

$$k_{1001001} = 2^6 + 2^3 + 1 = \mathbf{73}$$

また, 2025 の 2 進表記は

$$11111101001_{(2)} = 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 32 + 8 + 1$$

である. これは通常の意味では 11 桁である. よって, 求める長さ 12 の bit 列**サシスセソタチツテトナニ**は, これに 0 を先頭に加えた **011111101001**.

6.5 ヌネ

ヌ : 2 ネ : ③

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} \left(\cot \frac{\alpha + k}{2^n} \pi + \cot \frac{\alpha - k}{2^n} \pi \right) - \frac{2\alpha}{\pi} \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\alpha^2 - k^2} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} \left(\cot \frac{\alpha + k}{2^n} \pi + \cot \frac{\alpha - k}{2^n} \pi - \frac{2^n}{\pi} \cdot \frac{2\alpha}{\alpha^2 - k^2} \right) \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} \left(\cot \frac{\alpha + k}{2^n} \pi + \cot \frac{\alpha - k}{2^n} \pi - \frac{2^n}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{\alpha - k} + \frac{1}{\alpha + k} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} \left[\cot x - \frac{1}{x} \right]_{(k-\alpha)\pi/2^n}^{(k+\alpha)\pi/2^n} \end{aligned}$$



数学Ⅳ・D —京都大学作問サークル・Proxima Technology 杯—

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} \int_{(k-\alpha)\pi/2^n}^{(k+\alpha)\pi/2^n} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right)' dx \\
 &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} \int_{(k-\alpha)\pi/2^n}^{(k+\alpha)\pi/2^n} (x^{-2} - (\csc x)^2) dx
 \end{aligned}$$

よって $F(t) = t^{-2} - \csc^2 t$ である.

6.6 ノ, ハ, ヒフ, ヘ

ノ : 1 ハ : 6 ヒフ : -1 ヘ : 3

半角の公式, およびロピタルの定理により

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \sin t}{t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{3t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin^2(t/2)}{t^2} = \frac{1}{6}.$$

$F(t) = t^{-2} - (\sin t)^{-2}$ について,

$$\begin{aligned}
 &\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{\sin^2 t} \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 t - t^2}{t^2 \sin^2 t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{\sin^2 t} \cdot \frac{(\sin t - t)(\sin t + t)}{t^4} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{t}{\sin t} \right)^2 \cdot \frac{(\sin t - t)}{t^3} \cdot \left(\frac{\sin t}{t} + 1 \right) \right\} \\
 &= 1^2 \cdot \left(-\frac{1}{6} \right) \cdot (1 + 1) \\
 &= -\frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

6.7 ホ, マ

ホ : 2 マ : 2

問題文中の議論と, 補題 C. により

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} \int_{(k-\alpha)\pi/2^n}^{(k+\alpha)\pi/2^n} F(t) dt + \frac{2\alpha}{\pi} \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\alpha^2 - k^2} \\
 &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} \left(\cot \frac{\alpha+k}{2^n} \pi + \cot \frac{\alpha-k}{2^n} \pi \right) \\
 &= \cot \alpha \pi - \frac{1}{2^n} \left(\cot \frac{\alpha}{2^n} \pi + \cot \frac{\alpha - 2^{n-1}}{2^n} \pi \right) \\
 &= \cot \alpha \pi - \frac{1}{2^n \tan \frac{\alpha}{2^n} \pi} - \frac{1}{2^n} \tan \frac{\alpha}{2^n} \pi
 \end{aligned}$$



数学 IV・D —京都大学作問サークル・Proxima Technology 杯—

が成り立つ. 1 行目と 4 行目について, $n \rightarrow \infty$ による極限を取ることで

$$0 - \frac{2\alpha}{\pi} S_0(\alpha) = \cot \alpha\pi - \frac{1}{\alpha\pi} - 0$$

を得る. ただし, 極限の等式 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{\tan \theta\alpha\pi} = \frac{1}{\alpha\pi}$ を $\theta = \frac{1}{2^n}$ に関して用いた. よって,

$$S_0(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi}{2\alpha} \cot \alpha\pi$$

を得る.

6.8 ミム

ミム : 11

結論 : $\mathbb{C}$ 上正則であるような f_k は $k = 0, 1, 3$ であるため, 解答するべき値は

$$2^0 + 2^1 + 2^3 = 11$$

である. 以下, それぞれの関数の正則性について議論する.

- $f_0(z) = 0$ は定数関数である. よって $\alpha = 0$ とおくとき,

$$r(h) = \frac{0-0}{h} - 0 = 0$$

となり, これは極限の条件を明らかに満たす. よって $\mathbb{C}$ 上正則である.

- $f_1(z) = i$ も定数関数なので, $\alpha = 0$ とおくと $r(h) = 0$ より f_0 と同様に $\mathbb{C}$ 上正則である.
- $f_2(z)$ は $\mathbb{C}$ 上正則ではない. 実際, $z = 0$ で, h を純虚数とすると, $r(h) = \frac{\operatorname{Re}(h) - \operatorname{Re}(0)}{h} = 0$ となる. 一方で h を実数とすると, $r(h) = \frac{h-0}{h} = 1$ となる. よって, $h \rightarrow 0$ のときに $|r(h) - \alpha| \rightarrow 0$ となるような複素数 α は取れないので, 不適.
- $f_3(z)$ は正則である. 実際, $r(h) = \frac{i(z+h) - iz}{h} = \frac{ih}{h} = i$ で一定であるから, $\alpha = i$ と取ることによって正則性の条件が満たされる.
- $f_4(z)$ は正則ではない. 実際, $z = 0$ で, h を実数とすると, $r(h) = \frac{h-0}{h} = 1$. 一方, h を純虚数とすると, $r(h) = \frac{-h-0}{h} = -1$ となる. よって, $h \rightarrow 0$ のときに $|r(h) - \alpha| \rightarrow 0$ となるような複素数 α は取れないので, 不適.
- $f_5(z)$ は正則ではない. 実際, $z = 1$ で, h を実数とすると, $r(h) = \frac{|1+h|^2 - |1|^2}{h} = h + 2$ で, $h \rightarrow 0$ で $r(h) \rightarrow 2$ となる. 一方, $h = ai$ ($a \in \mathbb{R}$) とすると, $r(h) = \frac{|1+h|^2 - |1|^2}{h} = \frac{1+a^2-1}{ai} = -ai$ で, $h \rightarrow 0$ で $a \rightarrow 0$ より $r(h) \rightarrow 0$ となる. よって, $h \rightarrow 0$ のときに $|r(h) - \alpha| \rightarrow 0$ となるような複素数 α は取れないので, 不適.

6.9 メ, モ, ヤコ, ヨ

メ : 3 モ : 4 ヤコ : 17 ヨ : 2

まず,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n - 2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n + \frac{3}{2})^2 - \frac{17}{4}} = S_1 \left(\frac{\sqrt{17}}{2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2}$$



数学Ⅳ・D —京都大学作問サークル・Proxima Technology 杯—

である. エ, オ, カ と, 一致の定理から, $\alpha = \frac{\sqrt{17}}{2} - \frac{1}{2}$ に対して

$$2\alpha S_0(\alpha) - (2\alpha + 1)S_1(\alpha) + \frac{1}{\alpha + 1} = 0$$

が成立する. また, 問題文で示した等式から

$$2\alpha S_0(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - \pi \cot \alpha\pi = \frac{1}{\alpha} - \frac{\pi}{\tan\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi\right)} = \frac{1}{\alpha} + \pi \tan \frac{\sqrt{17}}{2}\pi$$

を利用することで, 以下のように求まる.

$$\begin{aligned} S_1(\alpha) + \frac{1}{2} &= \frac{1}{2\alpha + 1} \left(2\alpha S_0(\alpha) + \frac{1}{\alpha + 1} \right) + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{17}} \left(\frac{1}{\alpha} + \pi \tan \frac{\sqrt{17}}{2}\pi + \frac{1}{\alpha + 1} \right) + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \frac{2\alpha + 1}{\alpha(\alpha + 1)} + \frac{\pi}{\sqrt{17}} \tan \frac{\sqrt{17}}{2}\pi + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{\pi}{\sqrt{17}} \tan \frac{\sqrt{17}}{2}\pi + \frac{1}{2} \quad (\because 2\alpha + 1 = \sqrt{17}, \quad \alpha(\alpha + 1) = 4) \\ &= \frac{3}{4} + \frac{\pi}{\sqrt{17}} \tan \frac{\sqrt{17}}{2}\pi \end{aligned}$$

6.10 ラ, リ, ル, レ, ロ, ワ, ヲン

ラ : 2 リ : 2 ル : 2 レ : 2 ロ : 2 ワ : 7 ヲン : 12

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n + 3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2 + 2} = S_0(\sqrt{-2}) - \frac{1}{(0+1)^2 + 2} = S_0(\sqrt{-2}) - \frac{1}{3}$$

であるから, $S_0(\sqrt{-2})$ を求める.

問題文で示したように

$$S_0(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi}{2\alpha \tan \alpha\pi}$$

であり, $\cot$ の拡張を利用することで

$$\begin{aligned} S_0(\alpha) &= \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi}{2\alpha} \cot \alpha\pi \\ &= \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi i}{2\alpha} \cdot \frac{e^{i\pi\alpha} + e^{-i\pi\alpha}}{e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}} \\ &= \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi i}{2\alpha} \cdot \frac{e^{2i\pi\alpha} + 1}{e^{2i\pi\alpha} - 1} \\ &= \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi i}{2\alpha} \left(1 + \frac{2}{e^{2i\pi\alpha} - 1} \right) \\ &= \frac{1}{2\alpha^2} + \frac{\pi i}{2\alpha} \left(\frac{2}{1 - e^{2i\pi\alpha}} - 1 \right) \end{aligned}$$



数学 IV・D —京都大学作問サークル・Proxima Technology 杯—

$\alpha = \sqrt{-2}$ を代入して,

$$\begin{aligned} S_0(\sqrt{-2}) &= \frac{1}{2 \cdot (-2)} + \frac{\pi i}{2\sqrt{-2}} \left(\frac{2}{1 - e^{2i\pi\sqrt{-2}}} - 1 \right) \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left(\frac{2}{1 - e^{-2\sqrt{2}\pi}} - 1 \right) \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left(\frac{2}{1 - \exp(-2\sqrt{2}\pi)} - 1 \right) - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

以上より,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n + 3} = S_0(\sqrt{-2}) - \frac{1}{3} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left(\frac{2}{1 - \exp(-2\sqrt{2}\pi)} - 1 \right) - \frac{7}{12}$$

6.11 (コラム 1) ガンマ関数を利用した別解

解答: 十二夜咲夜

$\alpha = \sqrt{17}/2$ とおく. 一般に, Gamma 関数の無限積表示:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right) e^{-\frac{z}{n}} \quad (z \in \mathbb{C})$$

より

$$\psi(z) := \frac{d}{dz} \log(\Gamma(z)) = -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+z} \right) \quad (z \notin \mathbb{Z}_{\leq 0})$$

が成り立つ. これを用いると,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 + 3n - 2} &= \frac{3}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n-1)^2 + 3(n-1) - 2} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{n + \frac{1}{2} + \alpha} + \frac{1}{n + \frac{1}{2} - \alpha} \right) \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{\alpha} \left(\psi\left(\frac{1}{2} + \alpha\right) - \psi\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) \right) \end{aligned}$$

と表せることが分かる. 一方, Gamma 関数の相反公式:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad (z \notin \mathbb{Z})$$

より

$$\psi(1-z) - \psi(z) = \frac{\pi}{\tan(\pi z)} \quad (z \notin \mathbb{Z})$$

が成り立つので, $z = 1/2 - \alpha$ を代入して,

$$\psi\left(\frac{1}{2} + \alpha\right) - \psi\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) = \frac{\pi}{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\pi\right)} = \pi \tan(\alpha\pi)$$

を得る. ゆえに,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n - 2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{\sqrt{17}} \pi \tan\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\pi\right)$$

が従う.



6.12 (コラム 2) 出題背景

- 今回の $\cot$ の関係式の導出は [1] の議論をもとに出題した.
- 級数については, 2025 東京理科大学理学部数学科入試を参考にした.



VII 第4問解答

7.1 ア～キ

ア: ① イ: ⑧ ウ: ⑩ エ: ③ オ: ⑦ カ: ④ キ: ⑦.

導体棒に関する運動方程式は宇宙船内部から, 宇宙船そのものは外部から観測していることに注意しなければならない. 導体棒に関してのみ慣性力がはたらくことに注意すれば, 運動方程式はそれぞれ

- 導体棒に関する運動方程式

$$m \frac{dv}{dt} = iBl - kv - m \frac{dw}{dt}$$

- 宇宙船外装に関する運動方程式

$$M \frac{dw}{dt} = kv$$

となる.

また, 宇宙船内の回路について, 導体棒には大きさ vBl の誘導起電力が発生することを踏まえれば, キルヒホッフの法則は

$$u - vBl - ri_1 = u - vBl - L \frac{di_2}{dt} = 0$$

となる.

7.2 ク, ケ, コ, サ

ク: ⑥ ケ: ⑦ コ: ② サ: ⑦

$f_1(t) = t$ のとき,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f_1(t)](s) &= \int_0^\infty te^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty t \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \right)' dt \\ &= \left[-\frac{1}{s} te^{-st} \right]_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} dt \\ &= 0 + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} dt \quad (\because s > 0) \\ &= \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

$f_2(t) = \sin t$ のとき,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f_2(t)](s) &= \int_0^\infty e^{-st} \sin t dt \\ &= \int_0^\infty \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \right)' \sin t dt \\ &= \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \sin t \right]_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} \cos t dt \quad (\because s > 0) \end{aligned}$$



数学 IV・D —京都大学作問サークル・Proxima Technology 杯—

$$\begin{aligned}
 &= 0 + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} \cos t \, dt \quad (\because s > 0) \\
 &= \frac{1}{s} \int_0^\infty \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \right)' \cos t \, dt \\
 &= \frac{1}{s} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \cos t \right]_0^\infty - \frac{1}{s^2} \int_0^\infty e^{-st} \sin t \, dt \\
 &= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} \int_0^\infty e^{-st} \sin t \, dt \\
 &= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[f_2(t)](s)
 \end{aligned}$$

となる. よって $\mathcal{L}[f_2(t)](s)$ について解くことで

$$\mathcal{L}[f_2(t)](s) = \frac{1}{s^2 + 1}.$$

次に, f が指数増大度 α を持つとき, ある定数 M によって $|f(t)e^{-st}| \leq Me^{(\alpha - \operatorname{Re}(s))t}$ が成り立つから, $\operatorname{Re}(s) > \alpha$ ならば $\lim_{t \rightarrow \infty} |f(t)e^{-st}| = 0$ である. したがって, $f'(t)$ のラプラス変換について,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[f'(t)] &= \int_0^\infty f'(t)e^{-st} \, dt \\
 &= \left[f(t)e^{-st} \right]_0^\infty - \int_0^\infty f(t)(e^{-st})' \, dt \\
 &= 0 - f(0) + s \int_0^\infty f(t)e^{-st} \, dt \\
 &= -f(0) + s\mathcal{L}[f(t)]
 \end{aligned}$$

である.

7.3 シ, ス, セソ, タチ, ツ, テ

シ: 4 ス: 1 セソ: 20 タチ: 13 ツ: 8 テ: 2

連立微分方程式:

$$\begin{aligned}
 m \frac{dv}{dt} &= iBl - kv - m \frac{dw}{dt} \\
 M \frac{dw}{dt} &= kv \\
 u - vBl - ri_1 &= 0 \\
 ri_1 &= L \frac{di_2}{dt} \\
 i_1 + i_2 &= i
 \end{aligned}$$

に対してラプラス変換を施すと

$$\begin{aligned}
 msV(s) &= BLI(s) - kV(s) - msW(s) \\
 MsW(s) &= kV(s) \\
 U(s) - BLV(s) - rI_1(s) &= 0 \\
 rI_1(s) &= sLI_2(s) \\
 I_1(s) + I_2(s) &= I(s)
 \end{aligned}$$

数学 IV・D —京都大学作問サークル・Proxima Technology 杯—

これらを解いて (補足参照), $W(s)$ を $U(s)$ の式で表すと

$$W(s) = \frac{Ls + r}{\frac{MmrL}{kBl} s^3 + \left[\frac{(M+m)rL}{Bl} + \frac{MB\ell L}{k} \right] s^2 + \frac{MB\ell r}{k} s} U(s)$$

この式に各数値を代入して整理すると,

$$W(s) = \frac{4s + 1}{\{20Ms^2 + (13M + 8)s + 2M\}s} U(s)$$

7.3.1 補足: 連立方程式の解き方

$$msV(s) = BlI(s) - kV(s) - msW(s), \quad (2)$$

$$MsW(s) = kV(s), \quad (3)$$

$$U(s) - BlV(s) - rI_1(s) = 0, \quad (4)$$

$$rI_1(s) = sLI_2(s), \quad (5)$$

$$I_1(s) + I_2(s) = I(s). \quad (6)$$

■(a) (3) から $V(s)$ を消去

$$V(s) = \frac{Ms}{k} W(s). \quad (6)$$

■(b) (4) から $I_1(s)$

$$I_1(s) = \frac{U(s) - BlV(s)}{r}. \quad (7)$$

■(c) (5) から $I_2(s)$

$$I_2(s) = \frac{r}{sL} I_1(s). \quad (8)$$

■(d) (6) から $I(s)$

$$I(s) = I_1(s) + I_2(s) = \left(1 + \frac{r}{sL}\right) I_1(s) = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{sL}\right) (U(s) - BlV(s)). \quad (9)$$

■(e) (2) へ $I(s)$ を代入し、式 (6) を用いて $W(s)$ だけに整理

$$\left(\frac{mMs^2}{k} + Ms + ms\right) W(s) + Bl^2 \frac{Ms}{k} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{sL}\right) W(s) = Bl \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{sL}\right) U(s). \quad (7)$$

以上より

$$W(s) = \frac{Ls + r}{\frac{MmrL}{kBl} s^3 + \left[\frac{(M+m)rL}{Bl} + \frac{MB\ell L}{k} \right] s^2 + \frac{MB\ell r}{k} s} U(s)$$



数学 IV・D —京都大学作問サークル・Proxima Technology 杯—

7.4 ト, ナ

ト: ② ナ: ③

問題文から,

$$\begin{aligned} U(s) &= C(s)(R(s) - W(s)) \\ W(s) &= P(s)U(s) \end{aligned}$$

なので, これを整理して

$$W(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} R(s)$$

7.5 ニ

ニ: 1

$20Ms^2 + (13M + 8)s + 2M = 0$ の判別式を D とすれば $D = 9M^2 + 208M + 64 > 0$ かつ $13M + 8 > \sqrt{D}$ ゆえ, $20Ms^2 + (13M + 8)s + 2M = 0$ は 2 つの負の実数解を持つ. したがって, $F(s) = P(s)C(s)$ の不安定極は $s = 0$ の 1 個.

7.6 ヌ, ネノ, ハ, ヒ, フ, ヘ, ホ

ヌ: 2, ネノ: 33, ハ: 8 ヒ: 3, フ: 4, ヘ: 2, ホ: 5

$F(s)$ を計算すると

$$\begin{aligned} F(s) &= P(s)C(s) = \frac{4s + 1}{\{20Ms^2 + (13M + 8)s + 2M\}s} \cdot \frac{K(5s - 4s^2 - 1)}{5s} \\ &= \frac{K(4s + 1)(5s - 4s^2 - 1)}{5\{20Ms^2 + (13M + 8)s + 2M\}s^2}. \end{aligned}$$

よって $s = j\omega$ を代入すると, $j^2 = -1$ より

$$\begin{aligned} \frac{1}{K}F(j\omega) &= \frac{(4j\omega + 1)(5j\omega + 4\omega^2 - 1)}{5(-20M\omega^2 + (13M + 8)j\omega + 2M)(-\omega^2)} \\ &= \frac{(-16\omega^2 - 1 + (16\omega^3 + \omega)j)}{(-5\omega^2)(-20M\omega^2 + 2M + (13M + 8)\omega j)} \\ &= \frac{(-16\omega^2 - 1 + (16\omega^3 + \omega)j)}{(100M\omega^4 - 10M\omega^2) + (-65M\omega^3 + 8\omega^3)j} \end{aligned}$$

となる. この結果を $\frac{a + jb}{c + jd}$ と表すと,

$$\begin{aligned} a &= -16\omega^2 - 1, & b &= \omega + 16\omega^3 (= -\omega a), \\ c &= 100M\omega^4 - 10M\omega^2, & d &= -5(13M + 8)\omega^3 \end{aligned} \quad (8)$$

であり,

$$\operatorname{Re} \frac{1}{K}F(j\omega) = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \quad \operatorname{Im} \frac{1}{K}F(j\omega) = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$



数学 IV・D —京都大学作問サークル・Proxima Technology 杯—

となる. よって, 実部が 0 になるのは

$$0 = ac + bd = a(c - d\omega) = a \cdot \{(165M + 40)\omega^4 - 10M\omega^2\}$$

だから, $a, \omega \neq 0$ より

$$\omega^2 = \frac{10M}{165M + 40} = \frac{2M}{33M + 8}$$

のときであり, 虚部が 0 になるのは

$$0 = bc - ad = -a(c\omega + d) = -a \cdot \{100M\omega^5 - (75M + 40)\omega^3\}$$

だから, $a, \omega \neq 0$ より

$$\omega^2 = \frac{75M + 40}{100M} = \frac{15M + 8}{20M} = \frac{3}{4} + \frac{2}{5M}$$

のときである.

7.7 マ

マ: ④

作図手順に沿って考える.

1. $\frac{15M + 8}{20M} > \frac{2M}{33M + 8}$ であるため, ナイキスト軌跡ははじめに虚軸と交わり, その後に実軸と交わる.
2. $\omega_0 = 0, \omega_1 = \infty$ と考えた上で計算する. つまり, $\omega \rightarrow +0, \infty$ における $F(j\omega)$ の極限をそれぞれ, 符号を考慮しながら考えると

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{1}{K} F(j\omega) &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{(-16\omega^{-2} - \omega^{-4}) + (16\omega^{-1} - \omega^{-3})j}{(100M - 10M\omega^{-2}) + (8 - 65M)\omega^{-1}j} \\ &= \frac{-0 + 0j}{100M + 0j} \\ &= -0 + 0j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow +0} \frac{1}{K} F(j\omega) &= \lim_{\omega \rightarrow +0} \frac{(-16 - \omega^{-2}) + (16\omega + \omega^{-1})j}{(100M\omega^2 - 10M) + (8 - 65M)\omega j} \\ &= \frac{-\infty + \infty j}{-10M} \\ &= \infty - \infty j \end{aligned}$$

である. よって, $0 < \omega < \infty$ におけるナイキスト軌跡は, 右下の無限遠から始まり, 左上から原点に近づいていく.

3. $F(+j0) = \infty - j\infty$ と考えると, 複素平面上で右下にある点 から原点 0 に向かって円弧で結ばれる.
4. ナイキスト軌跡は実軸対象である. 実際, さらに, ω を $-\omega$ に入れ替えたとき, (8) から, a, b, c, d はそれぞれ $a, -b, c, -d$ に入れ替わる. よって,

$$\operatorname{Re}[F(-j\omega)] = \operatorname{Re}[F(j\omega)], \quad \operatorname{Im}[F(-j\omega)] = -\operatorname{Im}[F(j\omega)]$$

であり, ナイキスト軌跡は実軸対称であることが分かる.

5. $F(-j0) = \infty + j\infty, F(+j0) = \infty - j\infty$ と考えると, 右上から右下に向かって円弧で結ばれる. このような挙動を示しているのは ④ である.

7.8 ミム, メ, モ, ヤユ, ヨ, ラリ, ルレ, ロワ

ミム: 15 メ: 4 モ: 8 ヤユ: 15 ヨ: 8 ラリ: 13 ルレ: 32 ロワ: 65

■Step 1. 実軸との交点を求める $F(j\omega)$ に $\omega^2 = \frac{15M+8}{20M}$ を代入すると, ナイキスト軌跡と実軸の交点では, $\text{Im } F(j\omega) = 0$, つまり $d = -c\omega$ なので,

$$\frac{1}{K} F(j\omega) = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} = \frac{a(c - d\omega)}{c^2 + d^2} = \frac{ac - a(-c\omega)\omega}{c^2 + (-c\omega)^2} = \frac{ac(1 + \omega^2)}{c^2(1 + \omega^2)} = \frac{a}{c}$$

となる. ここで $\omega^2 = \frac{15M+8}{20M}$ を代入して計算すると,

$$a = -16\omega^2 - 1 = -16 \cdot \frac{15M+8}{20M} - 1 = - \cdot \frac{60M+32}{5M} - 1 = - \frac{65M+32}{5M}.$$

$$\begin{aligned} c &= 100M\omega^4 - 10M\omega^2 = 100M \left(\frac{15M+8}{20M} \right)^2 - 10M \cdot \frac{15M+8}{20M} \\ &= \frac{(15M+8)^2}{4M} - \frac{15M+8}{2} \\ &= \frac{(15M+8)((15M+8)-2M)}{4M} \\ &= \frac{(15M+8)(13M+8)}{4M}. \end{aligned}$$

以上より, ナイキスト軌跡と実軸の交点は

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \frac{a}{c} K = \frac{- \frac{65M+32}{5M}}{\frac{(15M+8)(13M+8)}{4M}} K \\ &= - \frac{4}{5} \cdot \frac{65M+32}{(15M+8)(13M+8)} K \\ &= - \frac{4}{5} \cdot \frac{65(M + \frac{32}{65})}{15 \cdot 13 (M + \frac{8}{15})(M + \frac{8}{13})} K \\ &= - \frac{4}{15} \cdot \frac{M + \frac{32}{65}}{(M + \frac{8}{15})(M + \frac{8}{13})} K \end{aligned}$$

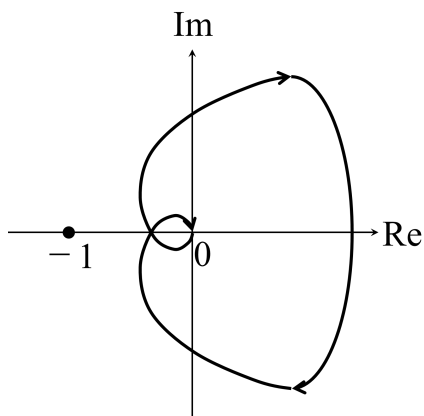
となる.

■Step2. ナイキストの安定判別法 ナイキスト経路は唯一の不安定極 0 を避けるようにとることから, ナイキスト経路内の極の個数は 0 である. よって, ナイキストの安定判別法より, ナイキスト軌跡が点 -1 のまわりを回らないようにする必要がある. このような状態になるためには, ナイキスト軌跡と実軸との交点が, 下図のように点 0 と点 -1 との間にあることである. すなわち

$$-1 < - \frac{4}{15} \frac{M + \frac{32}{65}}{\left(M + \frac{8}{15}\right) \left(M + \frac{8}{13}\right)} K < 0.$$

以上より, 求める条件は

$$0 < K < \frac{15}{4} \frac{\left(M + \frac{8}{15}\right) \left(M + \frac{8}{13}\right)}{M + \frac{32}{65}}$$



7.9 ヲ, シ

ヲ: 5 シ: 2

相加・相乗平均の関係を用いて

$$\begin{aligned}
 K_M &= \frac{15}{4} \left\{ \left(M + \frac{32}{65} \right) + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{8}{65} \right)^2 \cdot \frac{1}{M + \frac{32}{65}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{32}{65} \right\} \\
 &\geq \frac{15}{4} \left\{ 2 \sqrt{\left(M + \frac{32}{65} \right) \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{8}{65} \right)^2 \cdot \frac{1}{M + \frac{32}{65}}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{32}{65} \right\} \\
 &= \frac{15}{4} \left(\frac{16}{65\sqrt{3}} + \frac{32}{3 \cdot 65} \right) \\
 &= \frac{4\sqrt{3}}{13} + \frac{8}{13}
 \end{aligned}$$

となる. ただし, 等号成立条件は

$$M + \frac{32}{65} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{8}{65} \right)^2 \cdot \frac{1}{M + \frac{32}{65}},$$

すなわち,

$$M = -\frac{32}{65} \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{8}{65} < 0$$

のときであり, この下限は実現されない. よって, $M > 0$ の範囲で K_M は単調増加する. ゆえに

$$K_M > r = \lim_{M \rightarrow +0} \frac{15}{4} \frac{\left(M + \frac{8}{15} \right) \left(M + \frac{8}{13} \right)}{M + \frac{32}{65}} = \frac{15}{4} \cdot \frac{\frac{8}{13} \cdot \frac{8}{15}}{\frac{32}{65}} = \frac{5}{2}$$



VIII Web ページ掲載用問題 (by Shakayami)

正の整数 n に対して, n を割り切る素数の種類数を $\omega(n)$ と表す. たとえば,

$$\omega(1) = 0, \quad \omega(13) = 1, \quad \omega(12) = 2, \quad \omega(30) = 3$$

である. このとき,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\omega(n)}}{n^2} = \frac{\boxed{\mathcal{A}}}{\boxed{\mathcal{I}}}.$$

(作問: Shakayami)

解答 1. $n = p_1^{e_1} \times \cdots \times p_r^{e_r}$ としたとき, $\omega(n) = r$ である.

$f(n) := \frac{2^{\omega(n)}}{n^2}$ は, n と m が互いに素である場合 $f(nm) = f(n)f(m)$ が成り立つ. よって Euler 積表示を用いると

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} f(n) &= \prod_{p:\text{prime}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} f(p^k) \right) \\ &= \prod_{p:\text{prime}} \left(1 + \frac{2}{p^2} + \frac{2}{p^4} + \frac{2}{p^6} + \cdots \right) \\ &= \prod_{p:\text{prime}} \left(-1 + \frac{2p^2}{p^2 - 1} \right) \\ &= \prod_{p:\text{prime}} \left(\frac{p^2 + 1}{p^2 - 1} \right) \\ &= \prod_{p:\text{prime}} \left(\frac{(p^2 + 1)(p^2 - 1)}{(p^2 - 1)^2} \right) \\ &= \prod_{p:\text{prime}} \left(\frac{p^4 - 1}{(p^2 - 1)^2} \right) \\ &= \prod_{p:\text{prime}} \left[\frac{p^4 - 1}{p^4} \cdot \left(\frac{p^2}{p^2 - 1} \right)^2 \right] \\ &= \left(\prod_{p:\text{prime}} \frac{p^4 - 1}{p^4} \right) \cdot \left(\prod_{p:\text{prime}} \frac{p^2}{p^2 - 1} \right)^2 \\ &= \zeta(4)^{-1} \cdot \zeta(2)^2 \\ &= \frac{90}{\pi^4} \cdot \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^2 \\ &= \frac{90}{36} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$



References

- [1] Weng Kin Ho, Foo Him Ho, and Tuo Yeong Lee. “An elementary proof of the identity”. In: International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 43.8 (2012), pp. 1085–1092. DOI: [10.1080/0020739X.2011.644337](https://doi.org/10.1080/0020739X.2011.644337). eprint: <https://doi.org/10.1080/0020739X.2011.644337>. URL: <https://doi.org/10.1080/0020739X.2011.644337>.