

第 2 回
OnlineMathContest
Proxima Technology 杯

予選

2025 年 9 月 20 日 10:00–18:00

I 注意事項

- 1 提出ボタンより提出が行われないと採点されません。また、制限時間の終了とともに提出は締め切られます。(終了時に入力してある部分についても提出されないと採点されませんので、必ず制限時間内に提出ボタンを押すようにしてください。)
- 2 再提出は何度でも可能です。再提出が行われた際は、一番最後に提出されたものが採点されます。
- 3 問題番号、ページ及び採点方法については、下表のとおりです。

問題	ページ	採点方法
第 1 問	7～12	左の 8 問のすべてが採点されますが、そのうち点数が高い 5 問の合計を点数とします。 例 各大問の得点が、30, 50, 45, 0, 20, 30, 30, 35 であった場合、点数は $50 + 45 + 35 + 30 + 30 = 190$ となります。
第 2 問	13～16	
第 3 問	17～27	
第 4 問	28～35	
第 5 問	36～41	
第 6 問	42～47	
第 7 問	48～59	
第 8 問	60～67	

- 4 表記に関する注意は 4 ページに、人名のカタカナ表記は 5 ページに記載してあります。
- 5 不正行為について
 - ① 不正行為に対しては厳正に対処します。
 - ② 複数人で問題を解くことを禁止します。誰かと相談する、SNS 等で質問するなどすべて不正行為とみなされます。
 - ③ 試験終了までは問題、自身の解答、その他問題の内容に関することを他人に見せること (SNS に載せることも含む) を禁止します。また問題の PDF の取り扱いについては公式 HP を確認してください。
 - ④ 問題の解答作成に生成 AI 等のプログラムを活用することを禁止します。
 - ⑤ 不正行為を行った場合は、公式 HP に記載されている措置をとる場合があります。
- 6 その他の本コンテストに関する注意事項については公式 HP より確認してください。
- 7 解答上の注意は、次ページに記載してあります。必ず読みなさい。

II 解答上の注意

- 1 解答は、予選解答用ウェブページの問題番号に対応した解答欄にチェックを入れなさい。
- 2 問題の文中の ア，イウ などには、符号 (−) 又は数字 (0 ~ 9) が入ります。ア、イ、ウ、... の一つ一つは、これらのいずれか一つに対応します。
それらを予選用ウェブページの ア、イ、ウ、... で示された解答欄にチェックを入れて答えなさい。

例 アイウ に −83 と答えたいとき

ア	☒	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
イ	☐	0	1	2	3	4	5	6	7	☒	9
ウ	☐	0	1	2	☒	4	5	6	7	8	9

- 3 分数形で解答する場合、分数の符号は分子につけ、分母につけてはいけません。
例えば、エオ
カ に $-\frac{4}{5}$ と答えたいときは、 $\frac{-4}{5}$ として答えなさい。
また、それ以上約分できない形で答えなさい。
例えば、 $\frac{3}{4}$ と答えるところを、 $\frac{6}{8}$ のように答えてはいけません。
- 4 根号を含む形で解答する場合、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。
例えば、 $4\sqrt{2}$ ， $\frac{\sqrt{13}}{2}$ と答えるところを、 $2\sqrt{8}$ ， $\frac{\sqrt{52}}{4}$ のように答えてはいけません。
- 5 問題の文中の二重四角で表記された キ などには、選択肢から一つを選んで答えなさい。
- 6 同一の問題文中に クケ，コ などが 2 度以上現れる場合、原則として、2 度目以降は、クケ，コ のように細字で表記します。
- 7 サ a のクに 0 や 1 が入る場合は、 $0a$ は 0 を、 $1a$ は a を表します。
同様に、シ b のケの選択肢の指す項に 0 や 1 が入る場合は、 $0b$ は 0 を、 $1b$ は b を表します。
- 8 0 以上の実数 x に対して、 x ス のコに 0 や 1 が入る場合は、それぞれ x^0 は 1 を、 x^1 は x を表します。
同様に、0 以上の実数 y に対して、 y セ のサの選択肢の指す項に 0 や 1 が入る場合は、それぞれ y^0 は 1 を、 y^1 は y を表します。

III 表記に関する注意

- 数の表し方.
 - 自然数は 1 以上の整数の意味で用い, 自然数全体を $\mathbb{N}$ と表す.
つまり, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ である.
 - 整数全体を $\mathbb{Z}$ と表す.
 - 有理数全体を $\mathbb{Q}$ と表す.
 - 実数全体を $\mathbb{R}$ と表す.
 - 複素数全体を $\mathbb{C}$ と表す.
 - 混同のおそれが無いときは, π は円周率を表し, e はネイピア数を表す.
 - 虚数単位を $\sqrt{-1}$ と表す. ただし, 一部の問題は, 虚数単位を i と表す. (問題文の冒頭にその記述がなされている.)
 - 2 以上の自然数 n に対して, n 進法での数を $312_{(n)}$ のように表す.

- 行列の表し方.

- $m \times n$ 行列 A の (i, j) 成分が a_{ij} であるとき,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

や

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

と表す.

- 体 K 上の $m \times n$ 行列全体集合を $M_{m,n}(K)$ と表す. 特に $m = n$ のとき, $M_n(K)$ と表す.
- 断りのない限り, I は単位行列を表す.
- 対角行列

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

を $\text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ と表す.

- 行列 A に対して, tA で A の転置行列を表す.
- 複素行列 A に対して, A^* で A の随伴行列を表す.
- 複素正方行列 A がエルミート行列であるとは, $A = A^*$ を満たすことである.
- 正方行列 A のトレースを $\text{Tr}(A)$ と表し, 行列式を $\det(A)$ と表す.

IV 人名のカタカナ表記一覧

ここでは問題文に出てくる人物名の標準的なカタカナ表記をアルファベット順に一覧にして載せてあります。複数のカタカナ表記が存在する人物については、読み方を複数表示してあります。(ただし、載せているもの以外の表記があったり、長音符の有無など、ここに書かれているものがすべてとは限りません。)

- 人物名: カタカナ表記 1(/カタカナ表記 2)
- 例 Pythagoras: ピタゴラス/ピュタゴラス

- Abel: アーベル
- Arzelà: アルツェラ
- Ascoli: アスコリ
- Baxter: バクスター
- Boltzmann: ボルツマン
- Cauchy: コーシー
- Dehn: デーン
- Euler: オイラー
- Fatou: ファトゥ/ファトウ
- Fubini: フビニ
- Gauss: ガウス
- Hilbert: ヒルベルト
- Hölder: ヘルダー
- Jacobi: ヤコビ
- Jones: ジョーンズ

- Kauffman: カウフマン
- Klein: クライン
- Kronecker: クロネッカー
- Laurent: ローラン
- Lebesgue: ルベージュ
- Lévy: レヴィ
- Maclaurin: マクローリン
- Noether: ネーター
- Pauli: パウリ
- Petersen: ピーターセン/ペテルセン
- Poisson: ポアソン
- Reidemeister: ライデマイスター
- Schwarz: シュワルツ
- Sobolev: ソボレフ
- Yang: ヤン
- Weierstrass: ワイエルシュトラス
/ワイエルストラス

第2回 OnlineMathContest Proxima Technology 杯 予選

問題	採点方法
第1問	左の8問のすべてが採点されますが、そのうち点数が高い5問の合計を点数とします。 例 各大問の得点が, 30, 50, 45, 0, 20, 30, 30, 35 であった場合, 点数は $50 + 45 + 35 + 30 + 30 = 190$ となります。
第2問	
第3問	
第4問	
第5問	
第6問	
第7問	
第8問	

第1問 (配点 50)

太郎さんと花子さんは群論について会話をしている．二人の会話を読み，以下の問いに答えよ．

太郎: 交換子の定義がよく分からないなあ．

花子: 新しく学んだ概念の感覚が掴めないときは，具体例を考えてみると良いと思うよ．実際に具体的な群の元で交換子を計算してみましょう．

太郎さんと花子さんは，次で定義される 4 次対称群 $\mathfrak{S}_4$ の元 f, g の交換子 $[f, g]$ を計算し始めた．

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

太郎: 僕の計算結果と花子さんの計算結果が違うね．どこで間違えたんだろう．

花子: まずは fg の計算結果を比べてみよう．私は ア になったよ．

太郎: あれ，自分は イ になった．

花子: $(fg)(3) = f(g(3)) = f(4) = 4$ なので，太郎さんの計算は間違っているんじゃないかな．

太郎: そうか， n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の定義は $\{1, \dots, n\}$ から自身への全単射のなす群だから， $\mathfrak{S}_n$ の元の積は写像の合成に対応するんだね．自分は，間違えて gf を計算していたみたい．もう一度 $[f, g]$ を計算してみよう．

太郎: 計算した結果， $[f, g] =$ ウ $$ になったよ．また花子さんの計算結果と違うね．

花子: 交換子の定義が私と太郎さんとで異なっていそうだね．私は $[f, g] = fgf^{-1}g^{-1}$ を採用したから，エ になったよ．

太郎: 僕は $[f, g] = f^{-1}g^{-1}fg$ を採用していたから ウ になったのか．

ア ～ エ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

④	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	①	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	②	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	③	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
⑤	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$	⑥	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	⑦	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$	⑧	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第1問は次ページに続く.)

太郎: 計算をしているうちに交換子の感覚が掴めてきたかもしれない. 群の積は一般には非可換だから, 積の順番を交換するとき, おまけとして交換子が現れるんだね.

花子: 実際, 可換な 2 つの元の交換子は単位元になっているね.

太郎: ということは, 交換子部分群 $[G, G]$ は「交換子全体からなる部分群」なので, Abel 群の交換子部分群は自明群だね.

花子: 交換子部分群 $[G, G]$ の定義は, 正確には「交換子全体が生成する部分群」だよ.

太郎: そうか, 交換子 2 つの積がまた交換子になるとは限らないのか. だから, 部分群にするためには生成する必要があるのか. ということは, 交換子部分群を求めたい場合には, 群の任意の 2 元の交換子を計算しても不十分だよ. 具体的な群の交換子部分群はどのように計算するんだろう.

具体的な有限群 G の交換子部分群を調べる方法として, 次の手順がある.

方針

Step 1. 商群 G/N が Abel 群になる正規部分群 N の中で, 最小となるものの候補を見つける.

Step 2. その正規部分群の生成元が全て交換子 (の積) であることを示す.

この計算に関して, 以下の問に答えよ.

(i) 巡回群 $\mathbb{Z}/72\mathbb{Z}$ の自己同型群 $\text{Aut}(\mathbb{Z}/72\mathbb{Z})$ の位数は セソ である. 写像

$$\text{Aut}(\mathbb{Z}/72\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}/72\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/72\mathbb{Z}; \quad (\varphi, z) \longmapsto \varphi(z)$$

により $\text{Aut}(\mathbb{Z}/72\mathbb{Z})$ は $\mathbb{Z}/72\mathbb{Z}$ に左から作用する. この左作用を用いて定義される半直積 $(\mathbb{Z}/72\mathbb{Z}) \rtimes \text{Aut}(\mathbb{Z}/72\mathbb{Z})$ を G とする. $[G, G]$ の位数は タチ である.

(ii) 正の整数 n に対し, 一般線形群 $\text{GL}_n(\mathbb{F}_3)$ の部分群 G_n を

$$G_n := \{(a_{ij}) \in \text{GL}_n(\mathbb{F}_3) \mid a_{ij} = 0 \ (i > j)\}$$

により定める. $[G_2, G_2]$ の位数は ツ であり, $[G_4, G_4]$ の位数は テトナ である.

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 1 問は次ページに続く.)

太郎: 交換子部分群は「交換子全体が生成する部分群」であって, 「交換子全体からなる部分群」という説明だと不正確だったという話があったけれど, 本当に不正確なのかな?

花子: つまり, 「ある群の交換子部分群の元であって, 交換子で表せないもの」が存在するか, ということ?

この会話の後, 花子さんと太郎さんは第 1 問の**補足**で説明される有限群 G を任意の素数 p に対して構成した. 構成した群 G の性質をまとめると, 以下のようになる.

G の性質

1. 群 G はある 4 元 x_1, x_2, x_3, x_4 により生成される.
2. $[[G, G], G]$ は自明群である.
3. $G/[G, G], [G, G](= [G, G]/[[G, G], G])$ は単位元と位数が p の元のみからなる有限生成 Abel 群である. (特に, $\mathbb{F}_p$ -線形空間の構造を持つ.)
4. x_1, x_2, x_3, x_4 の $G/[G, G]$ への像は $\mathbb{F}_p$ 上の基底をなす.
5. $\{[x_i, x_j]\}_{1 \leq i < j \leq 4}$ は $[G, G]$ の $\mathbb{F}_p$ 上の基底をなす.
6. 写像 $G \times G \rightarrow [G, G]; (x, y) \mapsto [x, y]$ は交代的双線形写像

$$\Phi: G/[G, G] \times G/[G, G] \rightarrow [G, G]$$

を誘導する.

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 1 問は次ページに続く.)

太郎: これらの性質から, G の交換子部分群の元が全て交換子であるかは Φ が全射であるかに帰着されるね.

花子: しかも, Φ が全射であるかは線形代数の問題になるよね. 実際に任意の素数 p に対して Φ が全射でないことが示せるよ.

太郎: せっかくだから $p = 2$ の場合に Φ の像の様子を調べてみよう.

以下, $p = 2$ の場合を考える. $z \in [G, G]$ とする. G の性質の 3. と 5. を用いて

$$z = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} z_{ij} [x_i, x_j] \quad (z_{ij} \in \mathbb{F}_2)$$

のように線形結合で表す. (G の性質 5. より, z_{ij} は一意的に定まる.) 0 でない係数 z_{ij} の個数を $n(z)$ と定める. $0 \leq n(z) \leq 6$ であることに注意する.

z が Φ の像に入るか否か, $n(z)$ の値により場合分けして考察する.

- $n(z) = 0$ を満たす $z \in [G, G]$ は全て Φ の像に .
- $n(z) = 1$ を満たす $z \in [G, G]$ は全て Φ の像に .
- $n(z) = 5$ を満たす $z \in [G, G]$ は全て Φ の像に .
- $n(z) = 6$ を満たす $z \in [G, G]$ は全て Φ の像に .
- $n(z) = 2$ を満たす $z \in [G, G]$ で Φ の像に入らないものは 個である.
- $n(z) = 3$ を満たす $z \in [G, G]$ で Φ の像に入らないものは 個である.
- $n(z) = 4$ を満たす $z \in [G, G]$ で Φ の像に入らないものは 個である.

以上より, Φ の像に入らない $[G, G]$ の元の個数は 個である.

~ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

☐ ① 入る

☐ ② 入らない

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 1 問は次ページに続く.)

[補足] 太郎さんと花子さんによる群の構成方法

(この補足に書かれている内容は, 第 1 問を解答する上で必ずしも必要ではない.)

p を素数とする. $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_p)$ の極大冪単部分群

$$\mathrm{U}_3(\mathbb{F}_p) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_p) \mid a, b, c \in \mathbb{F}_p \right\}$$

の 3 つの元

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を考える. さらに, $\mathrm{U}_3(\mathbb{F}_p)$ の 6 個の直積群の部分群 G を以下で定義する.

$$G := \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle \subset \prod_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ 1 \leq i < j \leq 4}} \mathrm{U}_3(\mathbb{F}_p)$$

ここで, x_k ($1 \leq k \leq 4$) は次で定義される.

$$x_k := (A_{ij}^{(k)})_{(i,j)} \in G, \quad A_{ij}^{(k)} = \begin{cases} A & (i = k) \\ B & (j = k) \\ E_3 & (i, j \neq k) \end{cases}$$

第2問 (配点 50)

n を任意の非負整数とする. $\zeta_{5^n} := \exp(2\pi\sqrt{-1}/5^n) \in \mathbb{C}$ とおく. A_n を代数体 $K_n := \mathbb{Q}(\zeta_{5^{n+1}})$ の部分環 $\mathbb{Z}_{(5)}[\zeta_{5^{n+1}}]$ とする. (ここで $\mathbb{Z}_{(5)} := \{l/m \in \mathbb{Q} \mid l, m \in \mathbb{Z}, m \notin 5\mathbb{Z}\}$ である.)

特に断らない限り, 環の拡大 $R \subseteq R'$ が与えられると包含写像により R' を R -代数とみなす.

まず, 1 次元 Noether 局所整閉整域 $(R, \mathfrak{m})$ と, その商体 $F := \text{Frac}(R)$ の有限次拡大体 E , および元 $x \in E$ からなる 3 つ組 (R, E, x) に対する以下の条件 (★) を考える.

条件 (★)

$E = F(x)$ を満たし, さらに x の F 上の最小多項式を

$$X^d + c_{d-1}X^{d-1} + \cdots + c_1X + c_0 \quad (c_i \in F)$$

とおくとき, $c_j \in \mathfrak{m}$ ($j = 0, 1, \dots, d-1$) かつ $c_0 \notin \mathfrak{m}^2$ である.

(1) ζ_5 の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式の次数は であるから, 体拡大 $K_0/\mathbb{Q}$ の拡大次数は である. $(\mathbb{Z}_{(5)}, K_0, \zeta_5 + \alpha)$ が条件 (★) を満たす整数 α は存在するが, 一意ではない. 例えば α は

$$-\text{ }, -\text{ } \quad \left(\text{ただし } \text{ } < \text{ } \right)$$

のいずれもとることができる.

$\pi_0 := \zeta_5 - \text{ }$ とおく. 条件 (★) により, A_0 のイデアルの等式

$$\pi_0^{\text{ }} A_0 = \text{ } A_0$$

が得られる. これより, A_0 が局所整閉整域であることが分かる. より一般に, $\pi_n := \zeta_{5^{n+1}} - \text{ }$ を用いて, A_n も局所整閉整域であることも分かる.

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第2問は次ページに続く.)

(2) 次に $L_n := K_n(\sqrt[n]{5})$ とし, B_n を A_n の L_n における整閉包とする.

$$\begin{array}{ccc} B_n & \text{-----} & L_n \\ | & & | \\ A_n & \text{-----} & K_n \end{array}$$

条件 (★) について, 以下の**事実**が知られている.

事実

(R, E, x) は条件 (★) を満たす組とする. このとき, R の E における整閉包は $R[x]$ である.

組 (A_n, L_n, β_n) が条件 (★) を満たすような $\beta_n \in L_n$ は存在し, これにより $B_n = A_n[\beta_n]$ となる. 例えば $n = 0$ のとき, $a_0 := \boxed{\text{オ}}$, $b_0 := \boxed{\text{カ}}$ と置き, $\beta_0 := \sqrt[9]{5}^{a_0} / \pi_0^{b_0}$ とすることで構成できる. この β_0 の K_0 上の最小多項式の次数は $\boxed{\text{キ}}$ であり, それを条件 (★) のように

$$X^d + c_{d-1}X^{d-1} + \cdots + c_2X^2 + c_1X + c_0 \quad \left(d = \boxed{\text{キ}}, c_i \in K_0 \right)$$

とおく. このとき, c_j が整数であるような $j \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ は全部で $\boxed{\text{ク}}$ 個ある. それらの整数 c_j の中で最大のものは $\boxed{\text{ケ}}$ であり, 最小のものは $\boxed{\text{コ}}$ である.

ここで, 次の K_n -線形写像 Φ は $\boxed{\text{サ}}$ である.

$$\Phi: L_n \longrightarrow \text{Hom}_{K_n}(L_n, K_n); \quad x \longmapsto (\xi \longmapsto \text{Tr}_{L_n/K_n}(x\xi))$$

$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

- | | |
|----------------|----------------|
| ① 単射でなく全射でもない | ① 単射であるが全射ではない |
| ② 単射でないが全射ではある | ③ 単射であり全射でもある |

$j = 0, \dots, 8$ に対し

$$v_n^{(j)} := \Phi \left(\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} \left(\sqrt[n]{5} \right)^{\boxed{\text{セ}}} \right)$$

とおくと, K_n -線形空間 $\text{Hom}_{K_n}(L_n, K_n)$ の K_n -基底 $\{v_n^{(0)}, v_n^{(1)}, \dots, v_n^{(8)}\}$ は, L_n の K_n -基底 $\{1, \sqrt[n]{5}, \sqrt[n]{5}^2, \dots, \sqrt[n]{5}^8\}$ に関する双対基底となる (基底の並び方は順序を考慮する).

$\boxed{\text{セ}}$ の解答群

- | | | | |
|-------|--------|---------|---------|
| ① j | ① $-j$ | ② $j-1$ | ③ $1-j$ |
|-------|--------|---------|---------|

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 2 問は次ページに続く.)

(3) B_n の部分環 $B'_n := A_n[\sqrt[n]{5}]$ について, B_n と B'_n の差異を測ることを考える.

A_n -線形写像を局所化 $A_n \rightarrow K_n$ により係数拡大することで, 二つの埋め込み

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{A_n}(B_n, A_n) &\hookrightarrow \mathrm{Hom}_{K_n}(L_n, K_n), \\ \mathrm{Hom}_{A_n}(B'_n, A_n) &\hookrightarrow \mathrm{Hom}_{K_n}(L_n, K_n)\end{aligned}$$

を得る. これらによって, $\mathrm{Hom}_{A_n}(B_n, A_n), \mathrm{Hom}_{A_n}(B'_n, A_n)$ を $\mathrm{Hom}_{K_n}(L_n, K_n)$ の A_n -部分加群とみなす. これらの部分加群の Φ による逆像をそれぞれ M_n, M'_n とおく. さらに, M_n, M'_n はそれぞれ L_n の B_n -部分加群, B'_n -部分加群の構造を持つ. T_n を M_n の B_n 加群としての最小の生成系とし, T'_n を M'_n の B'_n 加群としての最小の生成系とする.

T'_n は 個の元からなり, $k :=$ として

$$\frac{1}{\sqrt[n]{5}^k} \in M'_n$$

を含むようにとれる. 一方 T_1 は, $p_1 :=$, $q_1 :=$ として,

$$\frac{\pi_1^{p_1}}{\sqrt[n]{5}^{q_1}} \in M_1$$

を含むようにとれる. 一般の n に対しても同様に, ある整数 p_n, q_n を用いて, T_n が $\pi_n^{p_n}/\sqrt[n]{5}^{q_n}$ を含むようにとれる.

L_n の B_n -部分加群の中で, M'_n に含まれる最大のものを N とする. このとき, N, M_n, M'_n について正しいのは である.

の解答群

- | | | | |
|--------------------------------------|-----------------------------|--------------------------------------|-----------------------------|
| ① $N \subsetneq M'_n \subsetneq M_n$ | ① $N = M'_n \subsetneq M_n$ | ② $M_n \subsetneq N \subsetneq M'_n$ | ③ $M_n \subsetneq N = M'_n$ |
| ④ $N \subsetneq M_n \subsetneq M'_n$ | ⑤ $N = M_n \subsetneq M'_n$ | ⑥ $N \subsetneq M_n = M'_n$ | ⑦ $N = M_n = M'_n$ |

B'_n に含まれる B_n のイデアルの中で最大のものを I_n とする. このとき, ある正の整数の組 (l_n, m_n) が存在して $I_n^{l_n} =$ B_n が成立する. 組 (l_n, m_n) の選択によらず, 有理数 m_n/l_n の値は一意に定まることが保証されるので, その値を r_n とおく. このとき, 次が分かる.

$$r_1 = \frac{\text{ニヌ}}{\text{ネノ}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \frac{\text{ハ}}{\text{ヒ}}$$

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 2 問は次ページに続く.)

以下では $n \geq 1$ とする. A_{n-1} -代数のテンソル積の普遍性が導く環準同型

$$B_{n-1} \otimes_{A_{n-1}} A_n \longrightarrow B_n$$

を考え, その像を B_n'' とおく. J_n を B_n のイデアルで $J_n \subseteq B_n''$ を満たす最大のものとする. このとき, ある正の整数の組 (l'_n, m'_n) が存在して $J_n^{l'_n} = \boxed{\text{エ}}^{m'_n} B_n$ が成立する. 組 (l'_n, m'_n) の選択によらず, 有理数 m'_n/l'_n の値は一意に定まることが分かるので, その値を s_n とおく. すると数列 $\{s_n\}_n$ は $\boxed{\text{フ}}$.

$\boxed{\text{フ}}$ の解答群

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| ① 0 に収束する | ① 1 に収束する |
| ② $\frac{1}{9}$ に収束する | ③ $\frac{1}{5}$ に収束する |
| ④ ∞ に発散する | ⑤ 振動する |

(4) 最後に, 環 $B_\infty := \bigcup_{n \geq 0} B_n$ とそのイデアル

$$I_\infty := \bigcap_{n \geq 0} I_n B_\infty, \quad J_\infty := \bigcup_{n \geq 0} J_n B_\infty$$

を考える. $m := \boxed{\text{ハ}}$, $l := \boxed{\text{ヒ}}$ とするとき, これらについて以下のことが分かる.

- 包含関係 $I_\infty^l \supseteq \boxed{\text{エ}}^m B_\infty$ は $\boxed{\text{ヘ}}$ である.
- 包含関係 $I_\infty^l \subseteq \boxed{\text{エ}}^m B_\infty$ は $\boxed{\text{ホ}}$ である.
- 包含関係 $J_\infty \subseteq J_\infty^2$ は $\boxed{\text{マ}}$ である.
- 包含関係 $I_\infty^l \supseteq \boxed{\text{エ}}^m J_\infty$ は $\boxed{\text{ミ}}$ である.
- 包含関係 $I_\infty^l \subseteq \boxed{\text{エ}}^m J_\infty$ は $\boxed{\text{ム}}$ である.

$\boxed{\text{ヘ}} \sim \boxed{\text{ム}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

- | | |
|-----|-----|
| ① 偽 | ① 真 |
|-----|-----|

第3問 (配点 50)

[1] 結び目の研究は, 三次元空間における円周の滑らかな埋め込みをいかに分類するかという, 幾何学的に自然な問題意識に由来する. すなわち, 同一の抽象的な円周であっても, その埋め込み方によって互いに同値でない対象が生じ得るため, その区別と体系的理解が結び目理論の中心課題となる. ここでは, 結び目の図式に基づき, 基本的な不変量を定義する.

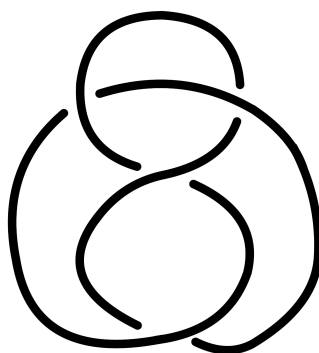


図 1: 8 の字結び目

まずは, 絡み目と結び目, 及びそれらに関する同値関係について説明する.

- n を正の整数とする. n 個の S^1 の滑らかな埋め込み $i: \coprod_{j=1}^n S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ の像を**絡み目**と呼ぶ. $n = 1$ の場合の絡み目を**結び目**と呼ぶ.
- 2つの絡み目 L, L' が**イソトピー同値**であるとは, 微分同相写像の族 $\{h_t: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3\}_{t \in [0,1]}$ が存在して, h_0 と h_1 が $\{h_t\}_{t \in [0,1]}$ によってホモトピックかつ, $h_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$, $h_1(L) = L'$ であることをいう.
- 絡み目 L, L' がイソトピー同値であるとき $L \simeq L'$ と書き, そうでないとき $L \not\simeq L'$ と書く.

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第3問は次ページに続く.)

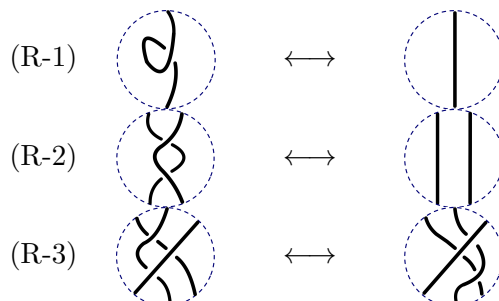
次に, 絡み目 L を $\mathbb{R}^3$ の平面上に分かりやすく図示した図式, 及びそれらに関する同値関係について考えよう.

- $p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ は射影 $p(x, y, z) := (x, y)$ とする. L の適当なイソトピー同値による変形 $L' = h_1(L)$ であって, 次を満たすようなものをとる.
 1. 高々有限個の点 $b_1, \dots, b_m \in p(L')$ に対して $p^{-1}(\{b_k\}) \cap L'$ は 2 点からなり, それ以外の $b \in p(L')$ では $p^{-1}(\{b\}) \cap L'$ は 1 点からなる.
 2. 各 $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ に対して $p^{-1}(\{b_k\}) = \{a_{k,1}, a_{k,2}\}$ とおく. ただし, $(a_{k,1}$ の z 座標) $>$ $(a_{k,2}$ の z 座標) であるとする. $j = 1, 2$ に対して $a_{k,j}$ の十分小さい開近傍 $U'_{k,j} \subset L'$ が存在して, 曲線 $p(U'_{k,1}), p(U'_{k,2})$ は点 b_k で横断的に交わる.
 点 b_k は像 $p(L')$ が自己交差する点であり, これらの点を **頂点** と呼ぶ. 頂点 b_k を通る 2 曲線 $p(U'_{k,1}), p(U'_{k,2})$ に対して, 前者を上, 後者を下であるとして上下を定める. このように, 頂点 b_k を通る 2 曲線に上下が定まっているとき, **交差** b_k と呼ぶ. これらから定まる, 各頂点を通る曲線の上下に関する情報が定められた像 $p(L')$ のことを**絡み目図式**と呼ぶ. $n = 1$ の場合は, **結び目図式**と呼ぶ.
- 2 つの絡み目図式 D, D' が**イソトピー同値**であるとは, 微分同相写像の族 $\{h_t: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2\}_{t \in [0,1]}$ が存在して, h_0 と h_1 が $\{h_t\}_{t \in [0,1]}$ によってホモトピックかつ, $h_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$, $h_1(D) = D'$ であり, $0 \leq t \leq 1$ によって各交差の上下の情報が変化しないようにできることをいう. 各 h_t は結び目図式 $D, h_t(D)$ の頂点の間の全単射を定めることに注意する.

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 3 問は次ページに続く.)

絡み目図式に対する以下の変形は **Reidemeister 移動** と呼ばれる.

Reidemeister 移動

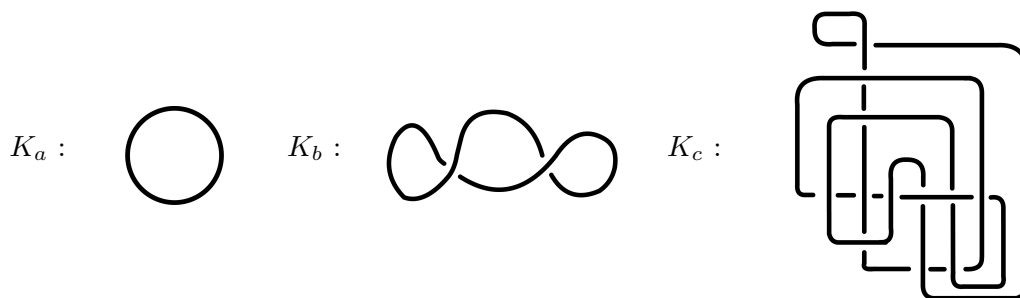


ここで, 上記の図式は, 絡み目図式の交差の付近のみを図示したものであり, 円周外の部分は矢印の両側で一致しているものとする.

二つの絡み目 L, L' と, これらの任意の絡み目図式を一つ選び, それぞれ D, D' とする. このとき, 以下の二つは同値であることが知られている.

- (i) L と L' はイソトピー同値である.
- (ii) D に有限回の絡み目図式のイソトピー同値による変形と有限回の Reidemeister 移動による変形を組み合わせることで D' を得ることができる.

たとえば, 次の図式を与える結び目 K_a, K_b, K_c について, ア が成り立つ.



ア の解答群

- | | |
|--|--|
| ① $K_a \simeq K_b, K_b \simeq K_c$ | ① $K_a \simeq K_b, K_b \not\simeq K_c$ |
| ② $K_a \not\simeq K_b, K_b \simeq K_c$ | ③ $K_a \not\simeq K_b, K_a \simeq K_c$ |
| ④ $K_a \not\simeq K_b, K_b \not\simeq K_c, K_c \not\simeq K_a$ | |

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 3 問は次ページに続く.)

以下, 混同のおそれがない限り, 絡み目図式を絡み目と書く. 定義に従って絡み目をイソトピー同値で分類するのは困難であるため, 絡み目を値に変換して分類を行うことを考える.

絡み目図式 D に対して **Kauffman 括弧** $\langle D \rangle$ を, 次の関係式で定義される Laurent 多項式環 $\mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ の元であるとする. ただし, 下記の Kauffman 括弧内は, 絡み目図式の交差の付近のみを点線の円周内に図示したものであり, 円周外にある部分は全て一致しているものとする. また第二式の左辺にある図式は, K_a の図式と D を合併したものを表す.

$$\begin{aligned}
 \left\langle \text{crossing} \right\rangle &= A \left\langle \text{parallel} \right\rangle + A^{-1} \left\langle \text{cup} \right\rangle \\
 \left\langle D \sqcup \text{circle} \right\rangle &= (-A^2 - A^{-2}) \langle D \rangle & (D \text{ は絡み目図式}) \\
 \left\langle \text{circle} \right\rangle &= 1
 \end{aligned}$$

Kauffman 括弧は Reidemeister 移動に対して不変ではない. 実際, Reidemeister 移動の (R-2) について, 変形前後の Kauffman 括弧を計算すると, 次を得る.

$$\left\langle \text{twist} \right\rangle = -A \boxed{\text{イ}} \left\langle \text{parallel} \right\rangle, \quad \left\langle \text{crossing} \right\rangle = \boxed{\text{ウ}} \left\langle \text{parallel} \right\rangle$$

また, (R-3) については次を得る.

$$\begin{aligned}
 \left\langle \text{triple crossing} \right\rangle &= A \boxed{\text{エ}} \left\langle \text{parallel} \right\rangle + A \boxed{\text{オ}} \left\langle \text{cup} \right\rangle + A \boxed{\text{カ}} \left\langle \text{parallel} \right\rangle \\
 &\quad + A^{-1} \boxed{\text{キ}} \left\langle \text{cup} \right\rangle + A^{-1} \boxed{\text{ク}} \left\langle \text{parallel} \right\rangle, \\
 \left\langle \text{triple crossing} \right\rangle &= A \boxed{\text{エ}} \left\langle \text{parallel} \right\rangle + A \boxed{\text{オ}} \left\langle \text{cup} \right\rangle + A \boxed{\text{カ}} \left\langle \text{parallel} \right\rangle \\
 &\quad + A^{-1} \boxed{\text{キ}} \left\langle \text{cup} \right\rangle + A^{-1} \boxed{\text{ク}} \left\langle \text{parallel} \right\rangle
 \end{aligned}$$

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 3 問は次ページに続く.)

また, 具体的な結び目図式とそれを 180 度回転させた図式について, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
 \left\langle \text{Diagram 1} \right\rangle &= \left(1 - A^{\boxed{\text{ケ}}}\right) \left(A^{\boxed{\text{コ}}} + A^{-\boxed{\text{サ}}} - A^{\boxed{\text{シ}}}\right) \left\langle \text{Diagram 2} \right\rangle \\
 &\quad + \left(A^5 + A^{-\boxed{\text{ス}}} - \boxed{\text{セ}} A^{\boxed{\text{ソ}}} - A^{-\boxed{\text{タ}}}\right) \left\langle \text{Diagram 3} \right\rangle, \\
 \left\langle \text{Diagram 4} \right\rangle &= \left(1 - A^{\boxed{\text{チ}}}\right) \left(A^{\boxed{\text{ツ}}} + A^{-\boxed{\text{テ}}} - A^{\boxed{\text{ト}}}\right) \left\langle \text{Diagram 2} \right\rangle \\
 &\quad + \left(A^5 + A^{-\boxed{\text{ナ}}} - \boxed{\text{ニ}} A^{\boxed{\text{ヌ}}} - A^{-\boxed{\text{ネ}}}\right) \left\langle \text{Diagram 3} \right\rangle
 \end{aligned}$$

以下, 結び目 $i: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ の場合のみを考える. 次の手順にしたがって, 結び目図式 D に対する **ひねり数** $wr(D)$ を定義する.

ひねり数

1. 結び目図式 D に対して向きを入れる.
2. 結び目図式の各交差に以下のように符号をつける.

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram 5} &= +1, & \text{Diagram 6} &= -1
 \end{aligned}$$

3. 結び目図式の全ての交差の符号の和を $wr(D)$ とおく.

なお, 結び目の定義に用いる S^1 の向きにかかわらず, 結び目図式からひねり数が一意に定義されることが知られている.

$t := A^{-4}$ とおく. 結び目 K の結び目図式 D に対して, 以下の $J(D)$ は **Jones 多項式** と呼ばれる. Jones 多項式は Reidemeister 移動について不変であることが知られている.

$$J(D) := \left(-t^{\boxed{\text{ノ}}}\right)^{-wr(D)} \langle D \rangle$$

$\boxed{\text{ノ}}$ の解答群

① 1	② 2	③ $\frac{1}{2}$	④ $\frac{3}{2}$	⑤ $\frac{3}{4}$
⑥ -1	⑦ -2	⑧ $-\frac{1}{2}$	⑨ $-\frac{3}{2}$	⑩ $-\frac{3}{4}$

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 3 問は次ページに続く.)

例えば, 以下の結び目の Jones 多項式について,

$$J\left(\text{trefoil}\right) = t \boxed{\text{ハ}} + t \boxed{\text{ヒ}} - t \boxed{\text{フ}}$$

である. また, 上記の鏡像の結び目の Jones 多項式について,

$$J\left(\text{mirror trefoil}\right) = t^{-1} \boxed{\text{ヘ}} + t^{-1} \boxed{\text{ホ}} - t^{-1} \boxed{\text{マ}}$$

である. ただし $\boxed{\text{ハ}} < \boxed{\text{ヒ}}$ かつ $\boxed{\text{ヘ}} < \boxed{\text{ホ}}$ である.

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 3 問は次ページに続く.)

[2] 本問を通して, 2 次元 C^∞ 級多様体を**曲面**と呼び, 連結かつコンパクトで境界のない曲面を**閉曲面**と呼ぶこととする. ここでは, グラフがどのような閉曲面に埋め込むことができるかについて考える. (グラフ理論の用語については, 27 ページの補足を参照してもよい.)

$G = (V, E)$ をグラフとする. グラフ G を 1 次元 CW 複体とみなしたとき, $|G|$ と表記する. すなわち, 頂点を 0 次元セル, 辺をその頂点を結ぶ 1 次元セルとみなして, 異なるセルが共通部分を持たないように配置する. このもとで, 次の言葉を準備する.

- グラフ G の閉曲面 Σ への**埋め込み**を, Σ への単射連続写像 $\iota: |G| \rightarrow \Sigma$ と定める. また, 差集合 $\Sigma \setminus \iota(|G|)$ の各連結成分を, 埋め込まれた G の**面**といい, その集合を**面集合**という.
- グラフの閉曲面への埋め込みが **2 胞体埋め込み** であるとは, 埋め込まれたグラフの各面が 2 次元開円板と同相であることと定義する.

以下の図 2～図 4 で示すグラフ K_5 , $K_{3,3}$, P_{10} のそれぞれについて, 球面 S^2 , 2 次元トーラス T^2 , 射影平面 $\mathbb{RP}^2$ に埋め込むことができるかを考えると, 次のようになる. 合致するものを解答群より選択せよ. ただし, 必要ならば下記の **Euler の公式**を用いてもよい.

S^2 : K_5 は , $K_{3,3}$ は , P_{10} は .
 T^2 : K_5 は , $K_{3,3}$ は , P_{10} は .
 $\mathbb{RP}^2$: K_5 は , $K_{3,3}$ は , P_{10} は .

Euler の公式

連結グラフ $G = (V, E)$ が種数 g の向き付け可能閉曲面 Σ_g に 2 胞体埋め込みされているとする. 集合 V , E , 埋め込まれた G の面集合 F の要素数 $|V|$, $|E|$, $|F|$ について, 次が成り立つ.

$$|V| - |E| + |F| = 2 - 2g$$

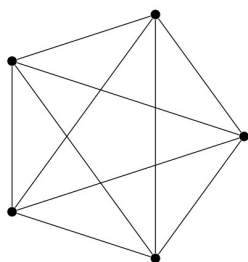


図 2: 完全グラフ K_5

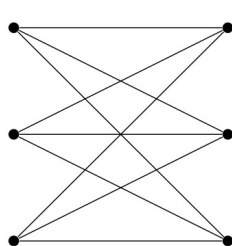


図 3: 完全二部グラフ $K_{3,3}$

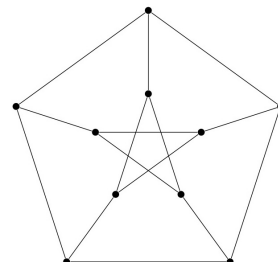


図 4: Petersen グラフ P_{10}

~ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

① 埋め込むことはできない

② 埋め込むことができる

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 3 問は次ページに続く.)

グラフの各頂点とその頂点から出る辺に対して、さらなる組み合わせ論的な構造を付加することで、向きづけ可能閉曲面への埋め込みを与える手続きが構成できる。ここで言葉と記号を準備する。

- 連結グラフ $G = (V, E)$ に対して、 G の半辺集合 H を $H = \{(v, e) \in V \times E \mid v \in e\}$ によって定義する。
- $(v, e) \in H$ に対して $\{v, v'\} = e$ を満たす $v' \in V$ が一意に存在する。半辺集合 H 上の写像 $\sigma: H \rightarrow H$ を、 $\sigma((v, e)) = (v', e)$ によって定義する。
- $v \in V$ に対して集合 $N(v) \subset H$ を、 $N(v) = \{(v, e) \in H\}$ と定める。
- 連結グラフ $G = (V, E)$ について、 G の任意の頂点 $v \in V$ に関して、 $N(v)$ 上に巡回順序 $\rho_v: N(v) \rightarrow N(v)$ が定まっているとき、 G を **リボングラフ** と呼ぶ。ただし、有限集合 S 上の巡回順序とは、長さが $|S|$ の S 上の巡回置換のことである。

グラフ $G = (V, E)$ が向き付け可能閉曲面 Σ に埋め込まれているとする。このとき、 Σ の向きを保つ局所座標系を、 G の各頂点はそれぞれただ 1 つの開被覆にのみ含まれるように取ると、 G の各頂点 v に関する $N(v)$ に対して、局所座標で反時計回りの順に巡回順序を入れることができ、この巡回順序によって G はリボングラフになる。

逆に、リボングラフ $G = (V, E)$ があるとき、以下の手続きによって、 G を 2 胞体埋め込みとして埋め込むことができるような向き付け可能閉曲面が構成できる。

リボングラフ G を 2 胞体埋め込みできる向き付け可能閉曲面を構成する手続き

■ Step 1. 各頂点 $v \in V$ に関する $N(v)$ が n_v 点集合であるとする。このとき、各 v に対して閉円板 D_v を考える。 D_v には境界の円周に誘導される向きが反時計回りになるように向きを入れる。そして、 D_v の円周を n_v 等分し、そのうち 1 つの区間を任意に選んで固定する。ただし、 $n_v = 0$ のときは区間を等分せず、Step 4 まで手続きをスキップする。以降 $1 \leq n_v$ とする。選んだ区間から円周上を反時計回りに数えて i 番目 ($1 \leq i \leq n_v$) の円周上の区間を I_{vi} とおく。

■ Step 2. 各 $v \in V$ について、 $N(v)$ の元を任意に 1 つ選び、 (v, e_1) とおく。そして、 $N(v)$ に定まった巡回順序 ρ_v によって、 $1 \leq i \leq n_v - 1$ に対して $(v, e_{i+1}) = \rho_v^i(v, e_1)$ と定める。ただし、 ρ_v^i は ρ_v を i 回合成した写像である。そして、 (v, e_i) と I_{vi} を対応付ける。

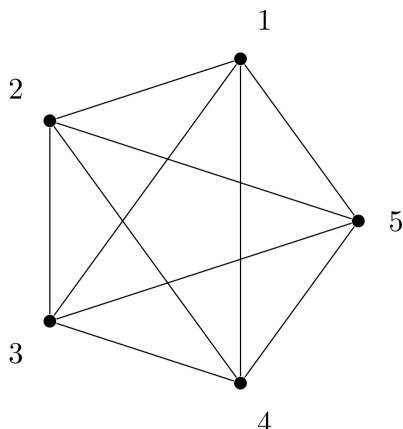
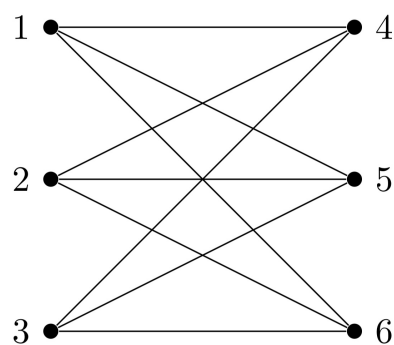
■ Step 3. 各 $e = \{v, v'\} \in E$ に対して、長方形 R_e を用意する。 R_e には境界に誘導される向きが反時計回りになるように向きを入れる。そして、 R_e の向かい合う辺の組を 1 つ選び、その組の辺のうち 1 つを $(v, e) \in N(v)$ に対応付けられた D_v の円周上の区間と貼り合わせ、もう片方の辺を $(v', e) = \sigma((v, e))$ に対応付けられた $D_{v'}$ の円周上の区間と貼り合わせる。この際、長方形の辺に誘導された向きと、貼り合わせる円周上の区間に誘導された向きが逆向きになるようにする。

■ Step 4. Step 3. までは境界付き曲面が得られるため、その境界の各連結成分に 2 次元開円板を貼り合わせる。

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 3 問は次ページに続く.)

K_5 と $K_{3,3}$ に対してリボングラフの構造を与え, 前ページで述べた向き付け可能閉曲面の構成について考えよう. (K_4 の場合の構成について述べた次ページの [補足] も参照せよ.)

まず, 下図 5, 6 のように各頂点に添字を定める. そして, 添字 i に対応する頂点に対して, 半辺 $(i, \{i, j\}) \in N(i)$ のことを単に j と略記し, K_5 の各頂点 i に関する $N(i)$ 上の巡回順序 $(*_1)$ と, $K_{3,3}$ の各頂点 i に関する $N(i)$ 上の巡回順序 $(*_2)$ をそれぞれ次のように定める.

図 5: K_5 グラフ図 6: $K_{3,3}$ グラフ

頂点 1:	2	5	4	3
頂点 2:	1	3	4	5
頂点 3:	2	5	1	4
頂点 4:	3	2	1	5
頂点 5:	1	4	3	2

図 7: 巡回順序 $(*_1)$

頂点 1:	4	6	5
頂点 2:	4	5	6
頂点 3:	4	5	6
頂点 4:	1	3	2
頂点 5:	1	3	2
頂点 6:	1	3	2

図 8: 巡回順序 $(*_2)$

即ち, 例えば K_5 の頂点 1 に関する $N(1)$ 上の巡回順序 $\rho_1: N(1) \rightarrow N(1)$ は以下で定められる.

$$(1, \{1, 2\}) \mapsto (1, \{1, 5\}) \mapsto (1, \{1, 4\}) \mapsto (1, \{1, 3\}) \mapsto (1, \{1, 2\})$$

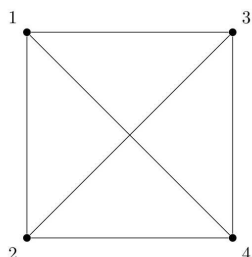
巡回順序 $(*_1)$, $(*_2)$ によって K_5 と $K_{3,3}$ をリボングラフとみなしたとき, 上の手続きによって向き付け可能閉曲面を構成すると, K_5 が埋め込まれる閉曲面の種数は ル, $K_{3,3}$ が埋め込まれる閉曲面の種数は レ である.

また, K_5 が 2 胞体埋め込みできる向き付け可能閉曲面の種数の最大値は ロ, $K_{3,3}$ が 2 胞体埋め込みできる向き付け可能閉曲面の種数の最大値は ワ である.

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 3 問は次ページに続く.)

[補足] K_4 を 2 胞体埋め込みできる向き付け可能閉曲面の構成

この手続きによる向き付け可能閉曲面の構成の一例を示す. 頂点数 4 の完全グラフ K_4 に対して, 下図 9 のように各頂点に添字を定め, K_4 の各頂点 $v \in V$ に関する $N(v)$ に対する巡回順序 (*) を図 10 で定める.

図 9: K_4 グラフ

頂点 1 :	2	3	4
頂点 2 :	3	4	1
頂点 3 :	4	2	1
頂点 4 :	1	3	2

図 10: 巡回順序 (*)

この巡回順序 (*) によるリボングラフ K_4 を例として, 2 胞体埋め込みできる向き付け可能閉曲面を上述の手続きから構成する様子を図 11~図 14 に示した.

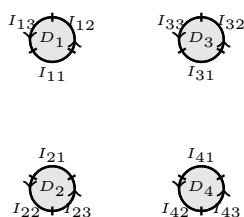


図 11: Step 1

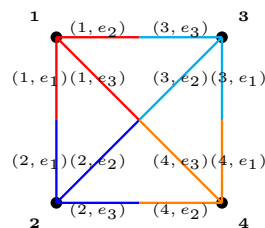


図 12: Step 2

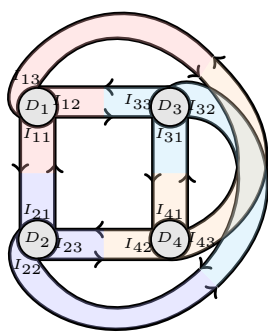


図 13: Step 3

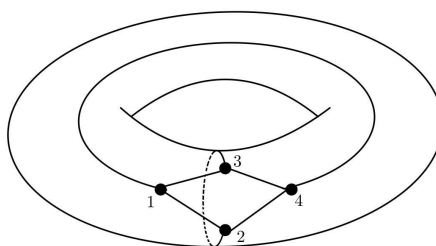


図 14: Step 4

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 3 問は次ページに続く.)

グラフ理論に関する補足

有向グラフ, 多重グラフ, 自己ループを許すグラフなどを扱う場合は, その都度明示的に定義を与える. 断りのない限り, 下記の「有限単純無向グラフ」を用いる.

- 有限集合 $V \neq \emptyset$ と集合 E の順序対

$$G = (V, E)$$

であって, $E \subseteq \binom{V}{2}$ を満たすものを**グラフ**と呼ぶ. ここで,

$$\binom{V}{2} := \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}$$

である. V の元を**頂点** (または**ノード**) といい, E の元を**辺**という.

- $E = \binom{V}{2}$ であるようなグラフ G を**完全グラフ**という. $|V| = n$ である完全グラフ G を K_n とも書く.
- 異なる頂点 $u, v \in V$ について $\{u, v\} \in E$ のとき, u と v は**隣接している**という.
- G の頂点 v に隣接する頂点の個数

$$\deg_G(v) = |\{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}|$$

を v の**次数**と呼ぶ.

第4問 (配点 50)

基本群やホモロジー群は、多様体の位相的性質を記述するうえで欠かすことのできない重要な位相不変量である。本問では、閉曲面を対象に、Dehn ツイストや被覆写像といった概念が、それらにどのような作用を及ぼすかについて考えてみよう。

まずは、基本的な言葉を準備する。

- 2次元 C^∞ 級多様体を**曲面**と呼び、連結かつコンパクトで境界のない曲面を**閉曲面**と呼ぶこととする。
- 閉区間 $[0, 1]$ および円周 S^1 から曲面への連続写像をそれぞれ**パス**, **ループ**と呼ぶ。
- 閉曲面 Σ と曲面 $\tilde{\Sigma}$, および全射連続写像 $p: \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ の組 $(\tilde{\Sigma}, p, \Sigma)$ が**被覆**であるとは, Σ の任意の点 $* \in \Sigma$ に対して, $*$ の近傍 U であって, U の逆像 $p^{-1}(U)$ の任意の連結成分 V に対して $p|_V: V \rightarrow U$ が同相写像になるようなものが存在することをいう。
- 対象である Σ が明らかな場合, 通称として, $\tilde{\Sigma}$ を**被覆空間**, p を**被覆写像**と呼ぶ。
- 定義における条件を満たすような U に対し, $p^{-1}(U)$ の連結成分の数は常に一定であるが, この数 n が有限である場合, $\tilde{\Sigma}$ を n 重被覆空間と呼ぶ。なお, 1 重被覆写像は同相写像である。

また, 本問で取り扱う **Dehn ツイスト** を, 以下のように定める。

Dehn ツイスト

M を向き付け可能な閉曲面とし, M 上の単純閉曲線 γ を考える。 γ の十分小さな管状近傍 $N(\gamma) \cong [0, 1] \times S^1$ と, 向きを保存する同相写像

$$\varphi: [0, 1] \times S^1 \rightarrow N(\gamma) \subset M$$

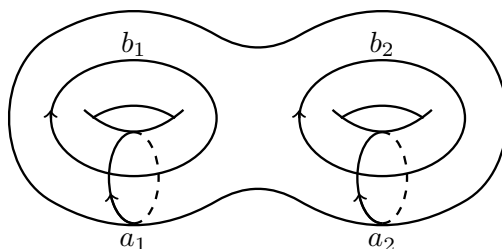
をとる。このとき, $\tau_\gamma: M \rightarrow M$ を, 管状近傍 $N(\gamma)$ 上では

$$\tau_\gamma(\varphi(t, e^{\sqrt{-1}\theta})) = \varphi(t, e^{\sqrt{-1}(\theta+2\pi t)}) \quad (0 \leq t \leq 1, \theta \in \mathbb{R})$$

として定め, その他の点では恒等写像として定める。ここで S^1 は単位円 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ と同一視している。写像 τ_γ は管状近傍 $N(\gamma)$ の取り方によるが, γ に十分近い管状近傍をとれば, この写像のホモトピー類は管状近傍の選び方によらず一意に定まることが知られている。このように, 曲面上の単純閉曲線に対して well-defined に定まるホモトピー類のことを **Dehn ツイスト**と呼ぶ。また, ループ γ に対し, ここで選択した τ_γ を **Dehn ツイストを定める同相写像**と呼ぶこととする。

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第4問は次ページに続く.)

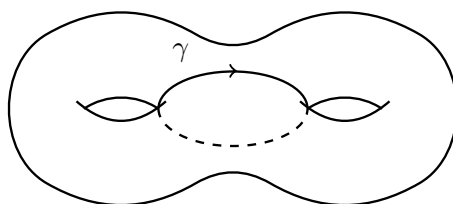
[1] 3次元ユークリッド空間内の種数2の向き付け可能閉曲面 $\Sigma_2 \subset \mathbb{R}^3$ を考える. Σ_2 の向きを, 外向き単位法線が右手系を与える向きで定める. 下図のように, この曲面上にループ a_1, b_1, a_2, b_2 を取る.



これ以降, ループとその一次ホモロジー類を区別せず表記する. 各対 (a_i, b_i) は互いに1回だけ横断的に交差し, 他のループとは交差しない. これらは, Σ_2 の一次ホモロジー群 $H_1(\Sigma_2)$ の生成元を与える.

$$H_1(\Sigma_2) \cong \mathbb{Z}a_1 \oplus \mathbb{Z}b_1 \oplus \mathbb{Z}a_2 \oplus \mathbb{Z}b_2$$

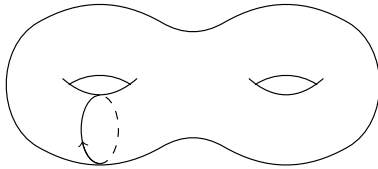
以下のようにループ γ をとり, τ_γ を Dehn ツイストを定める同相写像とする. このとき, a_1, b_2 について, $\tau_\gamma(a_1), \tau_\gamma(b_2)$ の図として最も適切なものは, それぞれ ☐ ア ☐ イ である. 選択肢は次のページより選べ.



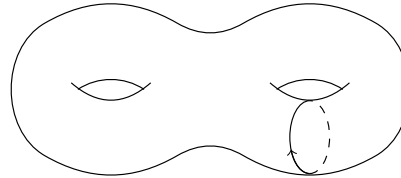
(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第4問は次ページに続く.)

ア, イ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

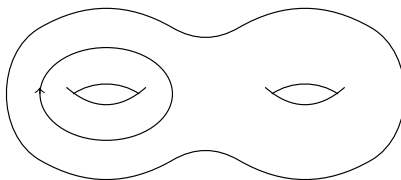
①



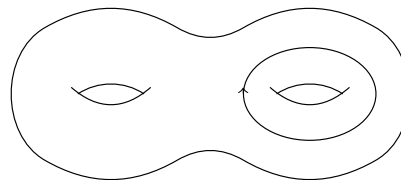
②



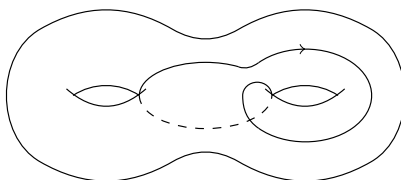
③



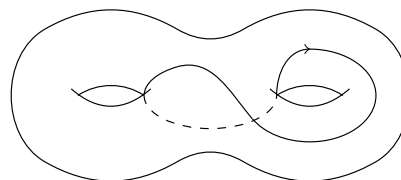
④



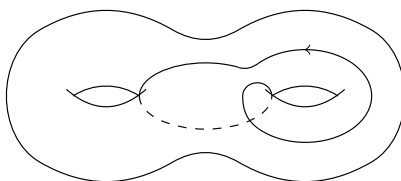
⑤



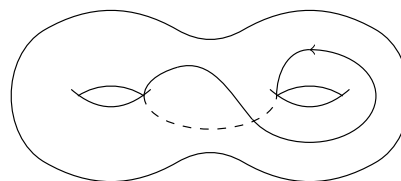
⑥



⑦



⑧



(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 4 問は次ページに続く.)

τ_γ が一次ホモロジー群に誘導する写像を $\tau_{\gamma*}$ とする. このとき, a_1, b_1, a_2, b_2 の $\tau_{\gamma*}$ による像は, それぞれ

$$\tau_{\gamma*}(a_1) = \boxed{\text{ウ}}, \quad \tau_{\gamma*}(b_1) = \boxed{\text{エ}}, \quad \tau_{\gamma*}(a_2) = \boxed{\text{オ}}, \quad \tau_{\gamma*}(b_2) = \boxed{\text{カ}}$$

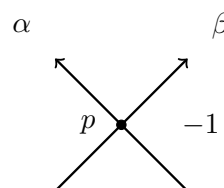
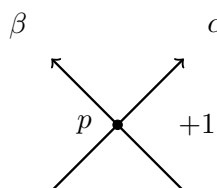
となる.

$\boxed{\text{ウ}} \sim \boxed{\text{カ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

① a_1	① b_1	② a_2	③ b_2
④ $-a_1 + b_1 + a_2$	⑤ $a_1 - b_1 + a_2$	⑥ $a_1 + b_1 - a_2$	⑦ $-a_1 + a_2 + b_2$
⑧ $a_1 - a_2 + b_2$	⑨ $a_1 + a_2 - b_2$		

各交点で横断的に交差するループ α, β の交点数 $\langle \alpha, \beta \rangle$ を, 以下のように定義する.

- α と β の交点 $p \in \alpha \cap \beta$ において, α, β が定める接ベクトルを, それぞれ $v_{\alpha,p}, v_{\beta,p}$ とする. 組 $(v_{\alpha,p}, v_{\beta,p})$ が正の向きなら $+1$, 負の向きなら -1 と符号を定め, 各交点にわたって符号の総和を取った値を α, β の交点数 $\langle \alpha, \beta \rangle$ と定める.



Σ_2 上のループ x を, γ との任意の交点で横断的に交わるようなものとする. $\tau_{\gamma*}(x)$ の具体的な表示を考えるため, Σ_2 上の自己同相 τ_γ によって, ループ x がどのように写されるかを考察しよう.

τ_γ の定義から, x と γ の交点 $p \in x \cap \gamma$ に対し, γ に沿って 1 周回る曲線が追加されることが分かる. 各交点に対し同様の曲線が追加されるので, $|\alpha \cap \gamma| = k$ としたとき, $\tau_{\gamma*}(x)$ は, k 本の γ に沿った曲線を x に追加したループになることが分かる. 以上をふまえると, 自己同型 $\tau_{\gamma*}: H_1(\Sigma_2) \rightarrow H_1(\Sigma_2)$ は, 次の形で表せる.

$$\tau_{\gamma*}(x) = \boxed{\text{キ}}$$

$\boxed{\text{キ}}$ の解答群

① $x + k\gamma$	① $-x + k\gamma$	② $x - k\gamma$	③ $-x - k\gamma$
④ $x + \langle x, \gamma \rangle \gamma$	⑤ $-x + \langle x, \gamma \rangle \gamma$	⑥ $x - \langle x, \gamma \rangle \gamma$	⑦ $-x - \langle x, \gamma \rangle \gamma$

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 4 問は次ページに続く.)

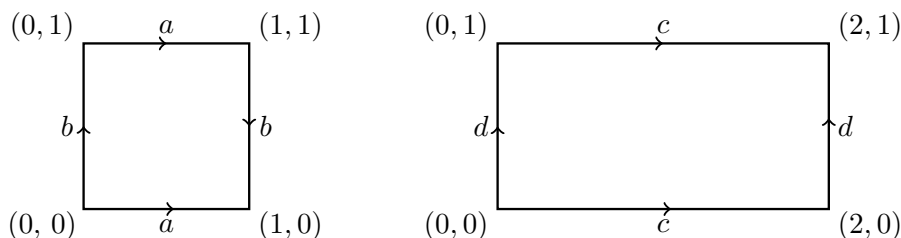
[2] ここからは被覆写像について考えていく．以降, 種数 g の向き付け可能閉曲面を Σ_g と書く．

まず, 具体的な被覆空間の例を考える．整数 $g \in \{2, 3, 4, 5\}$ のうち, Σ_g から Σ_3 への被覆写像が存在するものは $g = \boxed{\text{ク}}, \boxed{\text{ケ}}$ である．ただし $\boxed{\text{ク}} < \boxed{\text{ケ}}$ とする．

次に, 被覆写像とホモロジー群の関係を具体例で考える． $\mathbb{R}^2$ 内の領域

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}, \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$$

の境界を図に示すように貼り合わせたものをそれぞれ K, T^2 とする．これらはそれぞれ, Klein の壺, トーラスと呼ばれる曲面である．



被覆写像の例として, トーラスから Klein の壺への 2 重被覆写像について考えてみよう．まず, 全射 $p: T^2 \rightarrow K$ を次のように定義する．

$$q: (x, y) \mapsto \begin{cases} (x, y) & (0 \leq x < 1, 0 \leq y \leq 1) \\ (x-1, 1-y) & (1 \leq x < 2, 0 \leq y \leq 1) \end{cases}$$

このとき, q は T^2 から K への 2 重被覆写像になる．

次に, この被覆写像によって誘導されるホモロジー系列間の射 $q_*: H_*(T^2) \rightarrow H_*(K)$ を考える． T^2, K のホモロジー群はそれぞれ,

$$\begin{array}{lll} H_0(T^2) \cong \mathbb{Z}, & H_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2, & H_2(T^2) \cong \mathbb{Z}, \\ H_0(K) \cong \mathbb{Z}, & H_1(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & H_2(K) \cong 0 \end{array}$$

である．ただし, 上記の同型では $(1, 0 + 2\mathbb{Z}), (0, 1 + 2\mathbb{Z}) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ はそれぞれループ a, b が代表する類 $[a], [b] \in H_1(K)$ に対応し, $(1, 0), (0, 1) \in \mathbb{Z}^2$ はそれぞれ $[c], [d] \in H_1(T^2)$ に対応するものとする．この時, q_0, q_1, q_2 はそれぞれ以下のような対応を与える写像になる．ただし整数 n に対応する $H_0(T^2)$ または $H_2(T^2)$ の元を (n) で表す．

$$\begin{aligned} q_0: H_0(T^2) &\rightarrow H_0(K); & (n) &\mapsto \left(\boxed{\text{コ}} n \right) \\ q_1: H_1(T^2) &\rightarrow H_1(K); & (n, m) &\mapsto \left(\boxed{\text{サ}} n, m + 2\mathbb{Z} \right) \\ q_2: H_2(T^2) &\rightarrow H_2(K); & (n) &\mapsto 0 \end{aligned}$$

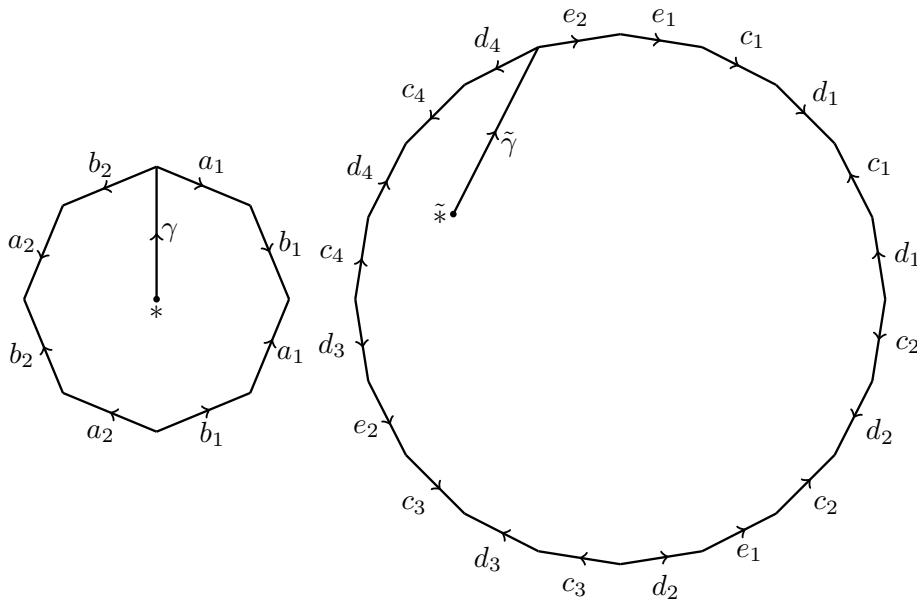
(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 4 問は次ページに続く.)

ここからは被覆写像に対するリフトというものについて考える．まず，定義を確認する．

- 被覆写像 $p: \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ 及び, 任意の位相空間 S からの連続写像 $f: S \rightarrow \Sigma$ に対し, 連続写像 f のリフトとは, 連続写像 $\tilde{f}: S \rightarrow \tilde{\Sigma}$ であって, $p \circ \tilde{f} = f$ を満たすものをいう．

なお, ホモトープな写像 $f, g: S \rightarrow \Sigma$ に関して, f の各リフトに対し, それとホモトープな g のリフトが存在する．また, f のリフトは一意的に定まるとは限らない．

次に, 種数 4 の向き付け可能閉曲面 Σ_4 から種数 2 の向き付け可能閉曲面 Σ_2 への被覆を考える．まず, Σ_2, Σ_4 をそれぞれ, 8 角形, 20 角形の境界を図に示すように貼り合わせたものとして考える．そして, それぞれの基点 $*$, $\tilde{*}$ 及び, 基点につながるパス $\gamma, \tilde{\gamma}$ を図のように定義する．



以下では, 基本群 $\pi_1(\Sigma_2, *)$, $\pi_1(\Sigma_4, \tilde{*})$ について考える．ここで, 端点を保ったパスのホモトピー類 $[\gamma_1], [\gamma_2], [\gamma]$ に対して, $[\gamma_1][\gamma_2]$ でパス γ_1 の終点とパス γ_2 の始点をつないだもののホモトピー類を表し, $[\gamma]^{-1}$ で γ を逆向きにしたもののホモトピー類を表す．また, 特に代表元を用いて $[\gamma_1][\gamma_2]$, $[\gamma]^{-1}$ を表記する場合, 簡単のため $\gamma_1\gamma_2$, γ^{-1} のように表記する．

これらの基本群の生成元を構成する．まず, $\pi_1(\Sigma_2, *)$ の元 α_i, β_i ($i = 1, 2$), 及び $\pi_1(\Sigma_4, \tilde{*})$ の元 $\tilde{\alpha}_j, \tilde{\beta}_j$ ($j = 1, 2, 3, 4$) を次で定める．これらはそれぞれ $\pi_1(\Sigma_2, *)$, $\pi_1(\Sigma_4, \tilde{*})$ の生成元である．

$$\begin{aligned}
 \alpha_i &:= [\gamma a_i \gamma^{-1}], & \beta_i &:= [\gamma b_i \gamma^{-1}] \\
 \tilde{\alpha}_1 &:= [\gamma e_2 e_1 c_1 (\gamma e_2 e_1)^{-1}], & \tilde{\beta}_1 &:= [\gamma e_2 e_1 d_1 (\gamma e_2 e_1)^{-1}], \\
 \tilde{\alpha}_2 &:= [\gamma e_2 e_1 c_2 (\gamma e_2)^{-1}], & \tilde{\beta}_2 &:= [\gamma e_2 d_2 (\gamma e_2)^{-1}], \\
 \tilde{\alpha}_3 &:= [\gamma e_2 c_3 \gamma^{-1}], & \tilde{\beta}_3 &:= [\gamma d_3 \gamma^{-1}], \\
 \tilde{\alpha}_4 &:= [\gamma c_4 \gamma^{-1}], & \tilde{\beta}_4 &:= [\gamma d_4 \gamma^{-1}]
 \end{aligned}$$

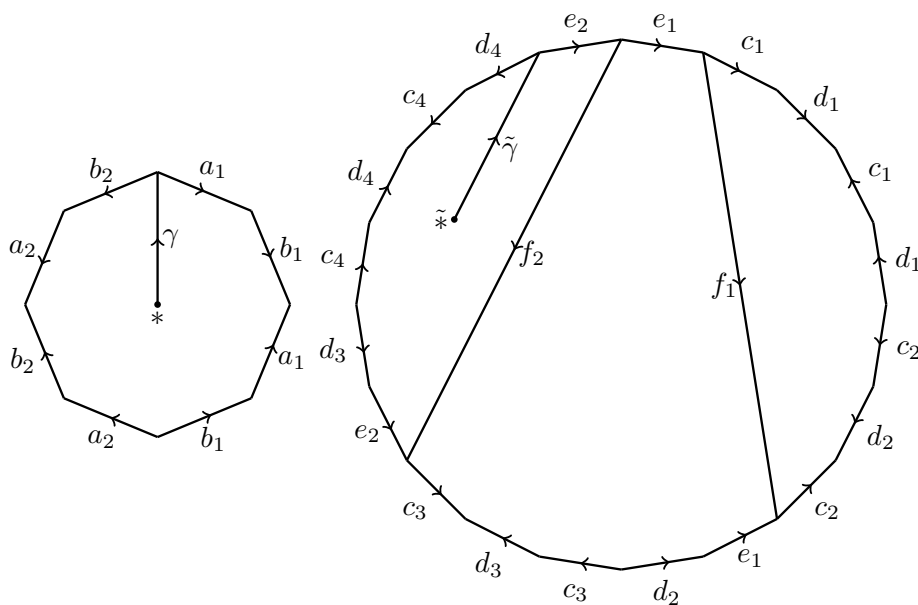
(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 4 問は次ページに続く.)

次に被覆写像を定めるために, 基本群間の準同型 $r_*: \pi_1(\Sigma_4, \tilde{*}) \rightarrow \pi_1(\Sigma_2, *)$ を, 次で定める.

$$\begin{array}{ll}
 \tilde{\alpha}_1 \mapsto \alpha_1 \alpha_2 \alpha_1 (\alpha_1 \alpha_2)^{-1} & \tilde{\beta}_1 \mapsto \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 (\alpha_1 \alpha_2)^{-1} \\
 \tilde{\alpha}_2 \mapsto \alpha_1 \alpha_2^2 (\alpha_1)^{-1} & \tilde{\beta}_2 \mapsto \alpha_1 \beta_2 (\alpha_1)^{-1} \\
 \tilde{\alpha}_3 \mapsto \alpha_1^2 & \tilde{\beta}_3 \mapsto \beta_1 \\
 \tilde{\alpha}_4 \mapsto \alpha_2 & \tilde{\beta}_4 \mapsto \beta_2
 \end{array}$$

このとき, 被覆写像 $r: \Sigma_4 \rightarrow \Sigma_2$ を, 点 $\tilde{*}$ を点 $*$ に, $\tilde{\gamma}, e_1, e_2$ をそれぞれ γ, a_2, a_1 に, 20 角形の頂点を 8 角形の頂点に写すもので, 基本群間の準同型 r_* を誘導するものとする. これは 20 角形を図に示すパス f_1, f_2 によって 3 分割した 8 角形をそれぞれ Σ_2 の 8 角形に写すように取れる.

この r による Σ_2 上のパス, ループのリフトについて考える. パス a_1 のリフトはそれぞれ シ, ス, 及び セ と端点を固定してホモトープであり, そのうちループとしてのリフトは ソ 個ある. また, パス b_1 のリフトはそれぞれ タ, チ, 及び ツ と端点を固定してホモトープであり, そのうちループとしてのリフトは テ 個ある.



シ ~ セ の解答群 (ただし番号は重複なく昇順に記入すること.)

① c_1	⑤ c_2	② c_3	③ c_4
④ e_1	⑥ e_2	⑦ $e_2 c_3$	⑧ $e_2 e_1$

タ ~ ツ の解答群 (ただし番号は重複なく昇順に記入すること.)

① d_1	⑤ d_2	② d_3	③ d_4
④ e_1	⑥ e_2	⑦ f_1	⑧ f_2

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 4 問は次ページに続く.)

自己同相写像については、また別の種類のリフトの概念がある。

- 被覆写像 $p: \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ 及び、 Σ 上の自己同相写像 $f: \Sigma \rightarrow \Sigma$ に対し、自己同相写像 f のリフトとは、 $\tilde{f}: \tilde{\Sigma} \rightarrow \tilde{\Sigma}$ であって $p \circ \tilde{f} = f \circ p$ を満たすものをいう。

自己同相写像のリフトについても、互いにホモトープな自己同相写像 $f, g: \Sigma \rightarrow \Sigma$ に対し、 f の各リフトについてそれとホモトープな g のリフトが存在する。これにより、写像類 (自己同相写像のホモトピー類) のリフトを考えることができる。

最後に、先ほど定めた被覆 (Σ_4, r, Σ_2) を用いて、Dehn ツイストの自己同相写像としてのリフトについて考えてみよう。簡単のため、曲面 Σ_2 もしくは Σ_4 上の自己交叉しないループ γ に対し、 γ による Dehn ツイストを $\tilde{\tau}_\gamma$ で表すことにする。

まず具体例として、 $\tilde{\tau}_{b_1}$ のリフトは、3つの Dehn ツイストの合成

$$\tilde{\tau}_{\boxed{\text{タ}}} \circ \tilde{\tau}_{\boxed{\text{チ}}} \circ \tilde{\tau}_{\boxed{\text{ツ}}}$$

である。一方で、自己同相写像のリフトは必ずしも存在するとは限らない。 $\pi_1(\Sigma_2, *)$ の元のうち、自己交叉のない代表元があり、かつ Dehn ツイストとそのリフトが存在するものは

$$\boxed{\text{ト}}, \boxed{\text{ナ}}, \boxed{\text{ニ}}, \boxed{\text{ヌ}}$$

となる。

$\boxed{\text{ト}} \sim \boxed{\text{ヌ}}$ の解答群 (ただし番号は重複なく昇順に記入すること。)

① α_1	① α_2	② β_2	③ $\alpha_1 \alpha_2$
④ $\beta_1 \beta_2$	⑤ $\alpha_1^2 \beta_1$	⑥ $\beta_2 \alpha_1 \beta_1^{-1} \alpha_1^{-1}$	⑦ $\alpha_1^2 \beta_1^2$

第 5 問 (配点 50)

この問題では, ある実定数 $C > 0$ と $\theta \in (0, 1)$ に対して, 次の**定理**が成り立つことを導く.

定理

任意の $f \in \dot{W}^{1,3/2}(\mathbb{R}^2) \cap L^{6,3}(\mathbb{R}^2)$ は $L^3(\mathbb{R}^2)$ にも属し, 関数不等式

$$\|f\|_{L^3} \leq C \|f\|_{\dot{W}^{1,3/2}}^\theta \|f\|_{L^{6,3}}^{1-\theta}, \quad f \in \dot{W}^{1,3/2}(\mathbb{R}^2) \cap L^{6,3}(\mathbb{R}^2) \quad (1)$$

が成立する.

n は正の整数とする. 以下, 本問で登場する関数空間と記号を準備する.

- 指数 $1 \leq p \leq \infty$ に対する L^p 空間 $L^p(\mathbb{R}^n)$ を, p 乗可積分な**実数値**関数の空間とする. また, そのノルムを $\|\cdot\|_{L^p}$ により表す.
- $1 \leq p < \infty$ および $s > 0$ に対して, 重み付き L^p 空間 $L^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ を以下で定める.

$$L^{p,s}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in L^p(\mathbb{R}^n) \mid \int_{\mathbb{R}^n} |x|^s |f(x)|^p dx < \infty \right\}$$

また, この空間のノルムは次で定める.

$$\|f\|_{L^{p,s}} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^s |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

- 関数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ に対し, その微分または弱微分 $\partial_j f$ ($j = 1, 2, \dots, n$) が存在するとき,

$$\nabla f := (\partial_1 f, \dots, \partial_n f), \quad \nabla \cdot f = \sum_{j=1}^n \partial_j f$$

と定義する.

- $1 \leq p < \infty$ に対し, 斉次 Sobolev 空間 $\dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ を以下で定める.

$$\dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n) := \{ f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \mid \partial_j f \in L^p(\mathbb{R}^n), j = 1, \dots, n \}.$$

ここで $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ は 局所可積分, すなわち $\mathbb{R}^n$ のコンパクト部分集合上で可積分な実数値関数の空間であり, $\partial_j f$ は x_j に関する弱微分である. この空間のセミノルムを次で定める.

$$\|f\|_{\dot{W}^{1,p}} := \|\nabla f\|_{L^p} = \left\| \left(\sum_{j=1}^n |\partial_j f|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p}$$

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 5 問は次ページに続く.)

a を正の定数とし, b を 0 でない実数とする. まず, 次の常微分方程式を考える.

$$\begin{cases} u'(t) = -bt^2 u(t)^4 & (t > 0), \\ u(0) = a \end{cases} \quad (2)$$

これを解くと

$$u(t) = \left(a^{\boxed{\text{アイ}}} + bt^{\boxed{\text{ウ}}} \right)^{\boxed{\text{エオ}}/\boxed{\text{カ}}}, \quad \begin{cases} t \in [0, \infty) & (b > 0), \\ t \in \left[0, \left(a^{\boxed{\text{アイ}}}/|b| \right)^{1/\boxed{\text{ウ}}} \right) & (b < 0) \end{cases}$$

となる. この微分方程式は, **定理**の関数不等式の最良関数を求める際に重要な役割を果たす.

以下 $p, q \in (1, \infty)$ は $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たすとする. 次は Hölder の不等式という名で知られている.

Hölder の不等式

任意の $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ に対して, 不等式 $\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$ が成り立つ.

まず, この関数不等式の最良定数は 1 であること, すなわち

$$\sup_{f \in L^p \setminus \{0\}, g \in L^q \setminus \{0\}} \frac{\|fg\|_{L^1}}{\|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}} = 1$$

となることを確認してみよう. ここで f, g に対する適当な変換を考えることで,

$$\sup_{\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^q} = 1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x) dx \quad (3)$$

が 1 になることを確かめれば十分であることに注意する. 以下では③を用いて証明を行う. ここで, 以下の汎関数 $J: L^p(\mathbb{R}^n) \times L^q(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ の停留点の条件を求めよう.

$$J(f, g, \lambda, \mu) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x) dx + \lambda (\|f\|_{L^p}^p - 1) + \mu (\|g\|_{L^q}^q - 1)$$

まず凸性を考えることで, 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ と $0 < |t| < 1$ を満たす実数 t に対して, 次が成り立つ.

$$\boxed{\text{キ}} \leq \frac{|\alpha + t\beta|^p - |\alpha|^p}{t} \leq \boxed{\text{ク}}$$

$\boxed{\text{キ}}$, $\boxed{\text{ク}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

① $2 \alpha ^p + 2 \beta ^p$	① $\left \alpha + \frac{\beta}{2} \right ^p + \left \alpha - \frac{\beta}{2} \right ^p$	② $ \alpha + \beta ^p - \alpha - \beta ^p$
③ $ \alpha ^p - \alpha - \beta ^p$	④ $2 \alpha + \beta ^p - 2 \alpha ^p$	⑤ $ \alpha + \beta ^p - \alpha ^p$

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 5 問は次ページに続く.)

優収束定理から, 任意の $f, \varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ について

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) + h\varphi(x)|^p - |f(x)|^p}{h} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \boxed{\text{ケ}} dx$$

が成り立つ. 残りの成分について変分を取って整理すると, 最大化問題③の停留条件は,

$$\begin{cases} g(x) + \lambda \boxed{\text{ケ}} = 0 & \text{a.e.} \\ \boxed{\text{コ}} \end{cases}$$

であることが分かる. 以上の議論により, 拘束条件 $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^q} = 1$ を思い出すと, 最大化問題③で最大値を達成する f, g の必要条件は

$$|g(x)| = |f(x)| \boxed{\text{サ}} \quad \text{a.e.}$$

であり, 逆にこのような f, g により, 最大化問題③の最大値が 1 であることが分かる. 以上より Hölder の不等式の最良定数は 1 であり, 等号が成立するための必要十分条件はある定数 $k > 0$ が存在して,

$$|g(x)| = k|f(x)| \boxed{\text{サ}} \quad \text{a.e.}$$

が成立することである.

$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群

① $ f(x) ^{p-2}$	② $p f(x) ^{p-2}$	③ $ f(x) ^{p-1}$	④ $p f(x) ^{p-1}$
⑤ $ f(x) ^{p-2}f(x)$	⑥ $p f(x) ^{p-2}f(x)$	⑦ $ f(x) ^{p-1}f(x)$	⑧ $p f(x) ^{p-1}f(x)$

$\boxed{\text{コ}}$ の解答群

① $\lambda = p$	② $\lambda = q$	③ $ \lambda = p$	④ $ \lambda = q$
⑤ $\lambda = 1/p$	⑥ $\lambda = 1/q$	⑦ $ \lambda = 1/p$	⑧ $ \lambda = 1/q$

$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

① p	② q	③ $p-1$	④ $q-1$	⑤ $p-2$
⑥ $q-2$	⑦ $p+1$	⑧ $q+1$	⑨ $p+2$	⑩ $q+2$

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 5 問は次ページに続く.)

これまでの準備のもと、関数不等式①の最良定数について考察しよう。スケール変換を考えることにより、関数不等式①が成り立つためには、

$$\theta = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

であることが必要である。以下、 θ はこの値に固定する。

まず、 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ とする。開円板 $B_R := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < R\}$ 上での積分について、部分積分により次を得る。

$$\int_{B_R} |f(x)|^3 dx = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}} \int_{B_R} \nabla \cdot (|f(x)|^3 x) dx - \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}} \int_{B_R} |f(x)| f(x) \nabla f(x) \cdot x dx$$

さらに、 $\text{supp } f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) \neq 0\}}$ はコンパクトだから

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{B_R} \nabla \cdot (|f(x)|^3 x) dx = 0$$

である。さらに各点での Cauchy-Schwarz の不等式、Hölder の不等式により

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbb{R}^2} |f(x)| f(x) \nabla f(x) \cdot x dx &\leq \int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^2 |\nabla f(x) \cdot x| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^2 |\nabla f(x)| |x| dx \end{aligned} \quad (4)$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla f(x)|^{3/2} dx \right)^{2\theta} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |x|^3 |f(x)|^6 dx \right)^{(1-\theta)/2} \quad (5)$$

を得る。以上より、 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ で不等式①は成り立つ。 $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ は $\dot{W}^{1,3/2}(\mathbb{R}^2) \cap L^{6,3}(\mathbb{R}^2)$ の中でノルム $\|f\| := \|f\|_{\dot{W}^{1,3/2}} + \|f\|_{L^{6,3}}$ に関して稠密だから、冒頭の**定理**の関数不等式は、

$$\theta = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}, \quad C = \left(\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}} \right)^{1/3}$$

の場合に成立する。すなわち、

$$\|f\|_{L^3} \leq \left(\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}} \right)^{1/3} \|f\|_{\dot{W}^{1,3/2}}^{\boxed{\text{シ}}/\boxed{\text{ス}}} \|f\|_{L^{6,3}}^{1-\boxed{\text{シ}}/\boxed{\text{ス}}}, \quad f \in \dot{W}^{1,3/2}(\mathbb{R}^2) \cap L^{6,3}(\mathbb{R}^2) \quad (6)$$

が成り立つ。

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 5 問は次ページに続く.)

最後に, 不等式⑥において等号を満たす恒等的に零でない関数 $f^* \in \dot{W}^{1,3/2}(\mathbb{R}^2) \cap L^{6,3}(\mathbb{R}^2)$ であって, 特に C^1 級関数であるものを求めよう. ただし簡単のため, $f^*(0) \geq 0$ とする.

f^* が関数不等式⑥において等号を満たす関数ならば, 不等式④, ⑤における等号を達成する必要がある. まず, 不等式④における等号成立条件は, 等式

$$|\nabla f^*(x) \cdot x| = |\nabla f^*(x)| |x|$$

が成立することである. 従って Cauchy-Schwarz の不等式の等号成立条件より, ある実数 $a(x)$ が存在して,

$$\nabla f^*(x) = a(x)x$$

が成立する. これより f^* は球対称であることが分かる. すなわち, ある C^1 級関数 $u: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して, すべての $x \in \mathbb{R}^2$ に対して次が成り立つ.

$$f^*(x) = u(t) \quad (t = |x|) \quad (7)$$

一方で, Hölder の不等式を用いた⑤における等号成立条件を考慮すれば, 正定数 k が存在して,

$$|\nabla f^*(x)| = k |x|^2 |f^*(x)|^4 \quad (8)$$

が成り立つ. よって⑦, ⑧より, 各 $t \in (0, \infty)$ ごとに

$$u'(t) = kt^2 u(t)^4 \quad (9)$$

または

$$u'(t) = -kt^2 u(t)^4 \quad (10)$$

を満たすことが分かる. ここで u' の連続性と常微分方程式の解の一意性を用いることで, u' は $(0, \infty)$ 上で常に⑨または⑩のどちらか一方のみで記述でき, u が零点を持たないことも分かる.

以上の議論から, 最初の微分方程式②に帰着される. つまり, 求めるべき関数 f^* は, 正の定数 $a = f^*(0) > 0$ と, 0 でない実数 b を用いて

$$f^*(x) = \left(a \boxed{\text{アイ}} + b |x| \boxed{\text{ウ}} \right) \boxed{\text{エオ}} / \boxed{\text{カ}}$$

と表せる. さらに, $f^* \in \dot{W}^{1,3/2}(\mathbb{R}^2) \cap L^{6,3}(\mathbb{R}^2)$ を満たすのは $b > 0$ の場合のみとなる.

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 5 問は次ページに続く.)

ここで新たな条件 $\|f^*\|_{L^\infty} = \|f^*\|_{L^5} = 1$ を追加すると定数 a, b は定まり,

$$a = \boxed{\text{ツ}}, \quad b = \pi \boxed{\text{テ}} / \boxed{\text{ト}}$$

となる. この a, b において f^* が不等式⑥の等号を成立させることは以下のノルム (のべき乗) を直接計算すればわかる.

$$\|f^*\|_{L^3}^3 = \frac{\boxed{\text{ナ}} \sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}} \pi,$$

$$\|f^*\|_{L^{6,3}}^6 = \frac{\boxed{\text{ネ}} \sqrt{\boxed{\text{ノ}}}}{\boxed{\text{ハヒ}}} \pi \boxed{\text{フヘ}} / \boxed{\text{ホ}},$$

$$\|f^*\|_{\dot{W}^{1,3/2}}^{3/2} = \frac{\boxed{\text{マ}} \sqrt{\boxed{\text{ミ}}}}{\boxed{\text{ムメ}}} \pi \boxed{\text{モ}} / \boxed{\text{ヤ}}$$

第6問 (配点 50)

正則関数全体の集合を $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ で表す. すなわち, $\mathcal{O}(\mathbb{C}) := \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ は } \mathbb{C} \text{ 全体で正則}\}$ とする. 実数 $p \geq 1$ に対して関数空間 $\mathcal{E}^p$ を次で定義する.

$$\mathcal{E}^p := \{f(z)e^{-|z|^2/2} \mid f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})\} \cap L^p(\mathbb{C}, dm)$$

ここで, dm は $\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}^2$ と同一視した場合の通常の Lebesgue 測度である. すなわち, 任意の $f(z)e^{-|z|^2/2} \in \mathcal{E}^p$ に対して, $x, y \in \mathbb{R}$ を用いて $z = x + iy$ とあらわすとき,

$$\int_{\mathbb{C}} |f(z)e^{-|z|^2/2}|^p dm = \int_{\mathbb{R}^2} |f(x+iy)e^{-(x^2+y^2)/2}|^p dx dy < \infty$$

が成立する.

(1) $p = 2$ の場合を考える. $F(z) := f(z)e^{-|z|^2/2}$, $G(z) := g(z)e^{-|z|^2/2} \in \mathcal{E}^2$ ($f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$) に対して, 内積を

$$\langle F, G \rangle := \int_{\mathbb{C}} F(z) \overline{G(z)} dm = \int_{\mathbb{C}} f(z) \overline{g(z)} e^{-|z|^2} dm$$

と定義すると $\mathcal{E}^2$ は Hilbert 空間となることが知られている. 以下, $\mathcal{E}^2$ の完全正規直交系を求める. $F(z) = f(z)e^{-|z|^2/2} \in \mathcal{E}^2$ を任意に取る. $f(z)$ の Maclaurin 展開により

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k e^{-|z|^2/2}, \quad a_k := \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \quad \textcircled{1}$$

と表せるから, 次のような予想を立てることができる.

予想

非負整数 n およびある $b_n > 0$ を用いて, 関数 $\varphi_n(z) := b_n z^n e^{-|z|^2/2}$ を導入すると, 関数の族 $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ が $\mathcal{E}^2$ の完全正規直交系となる.

これが正しいことを証明し, b_n の値を求めてみよう.

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第6問は次ページに続く.)

$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ の収束半径は ア である. 特に任意の $R > 0$ と非負整数 k に対して, 開円板 $B_R := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ 上で $|a_k z^k| \leq |a_k| R^k$ かつ

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| R^k < \infty$$

が成り立つ. 従って イ より, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ は集合 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \text{ア}\}$ 上で ウ 収束することが分かる. このことから, 以下を得る.

$$\int_{B_R} F(z) \overline{\varphi_n(z)} dm = \int_{B_R} \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k e^{-|z|^2/2} \overline{\varphi_n(z)} dm = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{B_R} z^k e^{-|z|^2/2} \overline{\varphi_n(z)} dm \quad (2)$$

ア の解答群

- | | | | | | |
|-----|-----|------------|---------|----------|-------------------|
| ① 0 | ② 1 | ③ ∞ | ④ π | ⑤ 2π | ⑥ $\frac{1}{\pi}$ |
|-----|-----|------------|---------|----------|-------------------|

イ, ウ については数学的に正しい議論が成立して等式(2)を正当化できるものを選べ.

イ の解答群

- | | |
|---------------------|-----------------------|
| ① Ascoli-Arzelà の定理 | ② Weierstrass の M 判定法 |
| ③ Lebesgue の収束定理 | ④ Fubini の定理 |

ウ の解答群

- | | | |
|------|------|--------|
| ① 弱 | ② 概 | ③ 測度 |
| ④ 各点 | ⑤ 一様 | ⑥ 広義一様 |

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 6 問は次ページに続く.)

さらに, $k \neq n$ のとき,

$$\int_{B_R} z^k \bar{z}^n e^{-|z|^2} dm = \boxed{\text{エ}} \quad (3)$$

である. このとき, 任意の n に対して

$$\langle F, \varphi_n \rangle = 0$$

であることは任意の n に対して $a_n = 0$ であるための オ であり, さらに任意の n に対して $a_n = 0$ であることは $F = 0$ であるための カ である.

オ, カ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

- | | |
|-----------------|-----------------|
| ② 必要条件ではないが十分条件 | ① 十分条件ではないが必要条件 |
| ④ 必要十分条件 | ③ 必要でも十分でもない条件 |

従って $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ は $\mathcal{E}^2$ を生成する直交系であることが分かった. 一方で非負整数 n に対して

$$I_n := \int_0^{\infty} r^{2n+1} e^{-r^2} dr$$

とすると,

$$I_n = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} \cdot \boxed{\text{ケ}}$$

である. ここで “.” は通常の意味のスカラール同士の積である. これを用いると,

$$b_n = \boxed{\text{コ}}$$

のとき, $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ が $\mathcal{E}^2$ の完全正規直交系となる.

ケ, コ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

- | | | | | |
|-------------------|--------------------|---------------------------|----------------------|-----------------------------|
| ⑥ π | ① $\sqrt{\pi}$ | ② $n!$ | ③ $\sqrt{n!}$ | ④ $\pi n!$ |
| ⑤ $\sqrt{\pi n!}$ | ⑥ $\frac{\pi}{n!}$ | ⑦ $\sqrt{\frac{\pi}{n!}}$ | ⑧ $\frac{1}{\pi n!}$ | ⑨ $\frac{1}{\sqrt{\pi n!}}$ |

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 6 問は次ページに続く.)

(2) 関数空間の埋め込み $\mathcal{E}^2 \hookrightarrow \mathcal{E}^4$ について, 次の**定理**が知られている.

定理

任意の $F \in \mathcal{E}^2$ は $\mathcal{E}^4$ にも属し, F に依存しないある定数 $C > 0$ が存在して

$$\|F\|_{L^4} \leq C\|F\|_{L^2}, \quad (F \in \mathcal{E}^2)$$

が成り立つ.

この**定理**を証明しよう. (1) の結論により, 任意の $F \in \mathcal{E}^2$ に対して,

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(z), \quad c_n = \langle F, \varphi_n \rangle \quad (4)$$

と展開することができ, 特に

$$\|F\|_{L^2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \quad (5)$$

となる.

次に $\|F\|_{L^4}$ について考える. L^p ノルム ($p = 2, 4$) に関する一般的な等式

$$\|F\|_{L^4}^4 = \|F^2\|_{L^2}^2$$

に注意する. ここで複素数 z を任意に固定すれば⑤, $b_n = \boxed{\text{コ}}$, Cauchy-Schwarz の不等式により,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n \varphi_n(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| |b_n| |z|^n \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 |z|^{2n} \right)^{1/2} < \infty$$

であり, ④の右辺の級数は絶対収束する. 従って次の等式を得る.

$$F(z)^2 = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{\substack{m,n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ m+n=\ell}} c_m c_n \cdot \boxed{\text{サ}} \cdot \varphi_\ell(z) \varphi_0(z)$$

$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

①	$m!n!$	①	$\ell!$	②	$\ell!m!n!$	③	$\frac{\ell!}{m!n!}$	④	$\frac{m!n!}{\ell!}$
⑤	$\sqrt{m!n!}$	⑥	$\sqrt{\ell!}$	⑦	$\sqrt{\ell!m!n!}$	⑧	$\sqrt{\frac{\ell!}{m!n!}}$	⑨	$\sqrt{\frac{m!n!}{\ell!}}$

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 6 問は次ページに続く.)

以降 $\sum_{\substack{m,n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ m+n=\ell}}$ を単に $\sum_{m+n=\ell}$ と書く. N を非負整数とし, $F(z)^2$ の部分

$$G_N(z) := \sum_{\ell=0}^N \sum_{m+n=\ell} c_m c_n \cdot \boxed{\boxed{\text{サ}}} \cdot \varphi_\ell(z) \varphi_0(z)$$

を用いて議論を続ける.

③と同様の直交性を用いることで,

$$\|G_N\|_{L^2}^2 = \pi \boxed{\boxed{\text{シス}}} \cdot \boxed{\boxed{\text{セ}}} \boxed{\boxed{\text{ソタ}}} \cdot \sum_{\ell=0}^N \boxed{\boxed{\text{チ}}}^{-\ell} \left| \sum_{m+n=\ell} c_m c_n \cdot \boxed{\boxed{\text{サ}}} \right|^2 \quad (6)$$

となる. ここで, ℓ を任意に固定して Cauchy-Schwarz の不等式を用いると, 以下を得る.

$$\left| \sum_{m+n=\ell} c_m c_n \cdot \boxed{\boxed{\text{サ}}} \right|^2 \leq \left(\sum_{m+n=\ell} |c_m c_n|^2 \right) \left(\sum_{m+n=\ell} \boxed{\boxed{\text{サ}}}^2 \right) \quad (7)$$

⑦を⑥に適用すると,

$$\begin{aligned} \|G_N\|_{L^2}^2 &= \pi \boxed{\boxed{\text{シス}}} \cdot \boxed{\boxed{\text{セ}}} \boxed{\boxed{\text{ソタ}}} \sum_{\ell=0}^N \boxed{\boxed{\text{チ}}}^{-\ell} \left| \sum_{m+n=\ell} c_m c_n \cdot \boxed{\boxed{\text{サ}}} \right|^2 \\ &\leq \pi \boxed{\boxed{\text{ツテ}}} \cdot \boxed{\boxed{\text{ト}}} \boxed{\boxed{\text{ナニ}}} \cdot \sum_{\ell=0}^N \sum_{m+n=\ell} |c_m c_n|^2 \end{aligned}$$

となる. また,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^N \sum_{m+n=\ell} |c_m c_n|^2 = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m+n=\ell} |c_m c_n|^2 = \left(\sum_{m=0}^{\infty} |c_m|^2 \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \right) = \|F\|_{L^2}^4$$

より, Fatou の補題を用いると, 定理の関数不等式

$$\|F\|_{L^4}^4 \leq \pi \boxed{\boxed{\text{ツテ}}} \cdot \boxed{\boxed{\text{ト}}} \boxed{\boxed{\text{ナニ}}} \cdot \|F\|_{L^2}^4.$$

が成り立つ. またこれより, $F \in \mathcal{E}^4$ であることも分かる.

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 6 問は次ページに続く.)

(3) **定理**の関数不等式の最良定数 C を求め, 等号を成立させる関数 F が存在するかについて調べよう. ℓ を固定した不等式⑦において等号が成立する条件は, ある $\alpha_\ell \in \mathbb{C}$ が存在し, $m+n=\ell$ を満たす任意の非負整数 m, n に対して

$$c_m c_n = \alpha_\ell \cdot \boxed{\text{サ}}$$

が成立することである. 全ての非負整数 ℓ に対してこの主張が成立するとき, c_n は n に依存しないある $\alpha, \mu \in \mathbb{C}$ を用いて

$$c_n = \mu \cdot \boxed{\text{ヌ}}^{\boxed{\text{ネ}}} \cdot \boxed{\text{ノ}}^{-\boxed{\text{ハ}}}$$

と表せることが分かる. よって $F(z)$ の明示的な表現

$$F(z) = \mu \cdot \boxed{\text{ヒ}}^{\boxed{\text{フ}}} \cdot \boxed{\text{ヘ}}^{-\boxed{\text{ホ}}} \cdot e^{-|z|^2/2}$$

が得られた.

$\boxed{\text{ヌ}} \sim \boxed{\text{ホ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

① $\frac{1}{2}$	② 1	③ 2	④ π	⑤ n
⑥ $n!$	⑦ α	⑧ z	⑨ αz	⑩ e

以上より**定理**の関数不等式の最良定数は

$$\left(\pi^{\boxed{\text{ツテ}}} \cdot \boxed{\text{ト}}^{\boxed{\text{ナニ}}} \right)^{1/4}$$

であり, 等号を成立させる関数まで求めることができた.

第 7 問 (配点 50)

[1]

■canonical 分布と分配関数 ある物理系の状態 i が $i = 1, \dots, n$ の n 種類あるとし, 状態 i での系のエネルギーが E_i であるとする. β を逆温度とする. つまり, β は絶対温度 T と Boltzmann 定数 k_B を用いて, 以下で定義されるパラメータとする.

$$\beta := \frac{1}{k_B T}$$

この系が逆温度 β の熱浴に接しているとき, 状態 i が出現する確率 Prob_i が

$$\text{Prob}_i := \frac{\exp(-\beta E_i)}{Z(\beta)}, \quad Z(\beta) := \sum_{i=1}^n \exp(-\beta E_i)$$

で与えられるとする. ここで $Z(\beta)$ は規格化定数であり, 分配関数と呼ぶ. 統計物理において分配関数は強力な道具であり, 様々な物理量を分配関数を通じて表すことができる.

例えば, エネルギーの期待値と分散はそれぞれ, 以下で表すことができる.

$$\langle E \rangle := \sum_{i=1}^n E_i \text{Prob}_i = \boxed{\text{ア}} \boxed{\text{イ}}$$

$$\text{Var}[E] := \sum_{i=1}^n (E_i - \langle E \rangle)^2 \text{Prob}_i = \boxed{\text{ウ}} \boxed{\text{エ}}$$

ただし, $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{ウ}}$ は, ①～⑤では関数の積, ⑥～⑨では微分作用素として, 関数 $\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{エ}}$ に作用するものとする.

$\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{ウ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

① β	② $-\beta$	③ β^2	④ $\frac{1}{\beta}$	⑤ $-\frac{1}{\beta}$
⑥ $\frac{1}{\beta^2}$	⑦ $\frac{\partial}{\partial \beta}$	⑧ $-\frac{\partial}{\partial \beta}$	⑨ $\frac{\partial^2}{\partial \beta^2}$	⑩ $-\frac{\partial^2}{\partial \beta^2}$

$\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{エ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

① $Z(\beta)$	② $Z(\beta)^2$	③ $Z(\beta)^3$	④ $\frac{1}{Z(\beta)}$	⑤ $\sqrt{Z(\beta)}$
⑥ $\exp(Z(\beta))$	⑦ $\log(Z(\beta))$	⑧ $\sin(Z(\beta))$	⑨ $\tan(Z(\beta))$	⑩ $\cosh(Z(\beta))$

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 7 問は次ページに続く.)

以降, 本問を解答するにあたって, 積分と微分との順序交換を用いてよいことが保証される.

■単原子分子理想気体 質量 m の単原子分子 N 粒子からなる理想気体が, 体積 V の容器 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ に詰められ, 相互作用や外力からの影響なしに運動している状況を考える. 系の状態は N 粒子の位置と運動量 $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N)$ により指定され, そのときの系のエネルギーは

$$E = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m} |\vec{p}_i|^2$$

と表される. ただし, $|\cdot|$ は $\mathbb{R}^3$ の通常のノルムである.

この系の分配関数は,

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \int_{\Omega^N \times (\mathbb{R}^3)^N} \exp\left(-\frac{\beta}{2m} \sum_{i=1}^N |\vec{p}_i|^2\right) d\vec{x}_1 \cdots d\vec{x}_N d\vec{p}_1 \cdots d\vec{p}_N \\ &= V^N \left(\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \right) \left(\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} \right)^N \end{aligned}$$

のように計算される.

, の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

① β	② 2β	③ π	④ 2π	⑤ m
⑥ $2m$	⑦ $\pi\beta$	⑧ $2\pi\beta$	⑨ πm	⑩ $2\pi m$

この系のエネルギー期待値と分散はそれぞれ,

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} \boxed{\text{サ}}, \\ V[E] &= \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} \boxed{\text{セ}} \end{aligned}$$

と求まる.

, の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

① $Nk_B T$	② $N^2 k_B T$	③ $N(k_B T)^2$
④ $(Nk_B T)^2$	⑤ $(Nk_B T)^2 - N(k_B T)^2$	⑥ $(Nk_B T)^2 + N(k_B T)^2$

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 7 問は次ページに続く.)

したがって、粒子数 N が十分大きい状況を考えると、エネルギーの ソ。ただし、変動係数は $\sqrt{\text{Var}[E]}/\langle E \rangle$ という比で定義される。

ソ の解答群

- ① 期待値が N に比例し分散が N に比例するので、変動係数の意味で分散は無視できない
- ② 期待値が N に比例し分散が N に比例するので、変動係数の意味で分散は無視できる
- ③ 期待値が N^2 に比例し分散が N に比例するので、変動係数の意味で分散は無視できない
- ④ 期待値が N^2 に比例し分散が N に比例するので、変動係数の意味で分散は無視できる
- ⑤ 期待値が N に比例し分散が N^2 に比例するので、変動係数の意味で分散は無視できる
- ⑥ 期待値が N^2 に比例し分散が N^2 に比例するので、変動係数の意味で分散は無視できない
- ⑦ 期待値が N^2 に比例し分散が N^2 に比例するので、変動係数の意味で分散は無視できる

■2 原子分子理想気体 次に、2 原子分子 N 粒子からなる理想気体を考察する。同様に質量は m で、体積 V の容器 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ に詰められ、相互作用や外力からの影響なしに運動しているとする。この場合は並進運動のエネルギーに加えて、回転運動のエネルギーも持つ。この分子の回転の自由度を J とするとき、 $J =$ タ であるため、系の状態変数は位置と運動量に加えて、各粒子 i ごとの回転角 $\theta_i^{(1)}, \dots, \theta_i^{(J)}$ と対応する角運動量 $L_i^{(1)}, \dots, L_i^{(J)}$ を考慮すれば良い。 J 種類の慣性モーメント $I_i^{(1)}, \dots, I_i^{(J)}$ が存在し、エネルギーは

$$E = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2m} |\vec{p}_i|^2 + \sum_{j=1}^J \frac{1}{2I_{i,j}} L_{i,j}^2 \right)$$

である。

この系についても分配関数を計算し、エネルギー期待値を算出すると、

$$\langle E \rangle = \frac{\text{チ}}{\text{ツ}} \text{サ}$$

となる。エネルギーの等分配則は、分配関数の Gauss 積分を実行した結果として理解される。

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 7 問は次ページに続く.)

■球形容器，一様重力下での単原子分子理想気体 質量 m の単原子分子 N 粒子からなる理想気体が，半径 R の球形容器 $\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ に詰められている．分子間の相互作用は存在せず，外力として一様な重力 mg を受けているとする．位置エネルギーの基準に平面 $z = 0$ をとると，系のエネルギーは

$$E = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2m} |\vec{p}_i|^2 + mgz_i \right)$$

で表される．このとき分配関数は，無次元量 $\xi := \beta mgR$ を導入して以下のように表せる．

$$Z(\beta) = \left(\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \right) \left(\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} \right)^N \left(\frac{4\pi}{3} R^3 \right)^N \left[3\xi^{-\boxed{\text{テ}}} \left\{ \xi \boxed{\text{ト}} - \boxed{\text{ナ}} \right\} \right]^N$$

N 粒子の z 座標の相加平均 $\bar{z} := (z_1 + z_2 + \cdots + z_N)/N$ について，その期待値は，

$$\begin{aligned} \langle \bar{z} \rangle &:= \frac{1}{Z(\beta)} \int_{\Omega^N \times (\mathbb{R}^3)^N} \bar{z} \exp \left(-\frac{\beta}{2m} \sum_{i=1}^N |\vec{p}_i|^2 - N\beta mg \cdot \bar{z} \right) d\vec{x}_1 \cdots d\vec{x}_N d\vec{p}_1 \cdots d\vec{p}_N \\ &= \boxed{\text{ニ}} \boxed{\text{イ}} \\ &= R \cdot \left(\frac{\boxed{\text{テ}}}{\xi} - \frac{\xi}{\xi \boxed{\text{ヌ}} - 1} \right) \end{aligned}$$

と求まる．ただし， $\boxed{\text{ニ}}$ は①～③では関数の積，④～⑦では微分作用素として，関数 $\boxed{\text{イ}}$ に作用するものとする．

$\boxed{\text{ト}}$ ， $\boxed{\text{ナ}}$ ， $\boxed{\text{ヌ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

① $\sin \xi$	① $\cos \xi$	② $\tan \xi$	③ $\cot \xi$
④ $\sinh \xi$	⑤ $\cosh \xi$	⑥ $\tanh \xi$	⑦ $\coth \xi$

$\boxed{\text{ニ}}$ の解答群

① $\frac{1}{\beta}$	① $-\frac{1}{\beta}$	② $\frac{1}{N\beta mg}$	③ $-\frac{1}{N\beta mg}$
④ $\frac{\partial}{\partial \beta}$	⑤ $-\frac{\partial}{\partial \beta}$	⑥ $\frac{1}{N\beta m} \frac{\partial}{\partial g}$	⑦ $-\frac{1}{N\beta m} \frac{\partial}{\partial g}$

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 7 問は次ページに続く.)

これにより, 次が従う (座標の原点を球形容器 Ω の中心に取っていることに注意せよ).

- $\xi \rightarrow +0$ の状況では, と解釈され, $\langle \bar{z} \rangle$ は に近づく.
- $\xi \rightarrow +\infty$ の状況では, と解釈され, $\langle \bar{z} \rangle$ は に近づく.

,

 の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

- | | |
|------------------|------------------|
| ① 重力の影響に比べて十分に高温 | ① 重力の影響に比べて十分に低温 |
|------------------|------------------|

,

 の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

- | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|
| ① R | ① $\frac{2}{3}R$ | ② $\frac{1}{2}R$ |
| ③ $\frac{1}{3}R$ | ④ 0 | ⑤ $-\frac{1}{3}R$ |
| ⑥ $-\frac{1}{2}R$ | ⑦ $-\frac{2}{3}R$ | ⑧ $-R$ |

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 7 問は次ページに続く.)

[2] $a(x), b(x), c(x), d(x)$ は複素数値関数とし, 次の 4×4 行列値関数 $R(x)$ を考察する.

$$R(x) := \begin{pmatrix} a(x) & 0 & 0 & d(x) \\ 0 & b(x) & c(x) & 0 \\ 0 & c(x) & b(x) & 0 \\ d(x) & 0 & 0 & a(x) \end{pmatrix} \quad (1)$$

これは, eight-vertex model と呼ばれる統計物理モデルの可解性を背景に持つ行列である.

(1) 行列値関数 $R(x)$ を与える $a(x), b(x), c(x), d(x)$ に対し, 関数 $w_1(x), w_2(x), w_3(x), w_4(x)$ を

$$\begin{pmatrix} w_1(x) \\ w_2(x) \\ w_3(x) \\ w_4(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(x) \\ b(x) \\ c(x) \\ d(x) \end{pmatrix} \quad (2)$$

によって定める. $R(x)$ を, $w_i(x)$, および以下で定める Pauli 行列とその Kronecker 積を用いて表示することを考える. 以下では, 複素ベクトル空間 V の自己準同型環を $\text{End}(V)$ と表す.

Pauli 行列・Kronecker 積

本問では, Pauli 行列を以下で定義する.

$$\sigma^1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \sigma^4 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

また, $A := (a_{ij}) \in \text{End}(\mathbb{C}^n)$ と $B \in \text{End}(\mathbb{C}^m)$ に対して, その **Kronecker 積** $A \otimes B \in \text{End}(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m)$ を以下で定義する.

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nn}B \end{pmatrix}$$

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 7 問は次ページに続く.)

$\text{End}(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$ の要素として, $R(x)$ は以下のように表される.

$$R(x) = w_1(x) \left(\boxed{\text{フ}} \otimes \boxed{\text{ヘ}} \right) + w_2(x) \left(\boxed{\text{ホ}} \otimes \boxed{\text{マ}} \right) \\ + w_3(x) \left(\boxed{\text{ミ}} \otimes \boxed{\text{ム}} \right) + w_4(x) \left(\boxed{\text{メ}} \otimes \boxed{\text{モ}} \right)$$

$\boxed{\text{フ}} \sim \boxed{\text{モ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

①	σ^1	②	σ^2	③	σ^3	④	σ^4
---	------------	---	------------	---	------------	---	------------

x, y をスカラーとする. 行列値関数 $R(x)$ に対して, **Yang-Baxter 方程式** と呼ばれる条件

$$R_{12}(x)R_{13}(y)R_{23}(x-y) = R_{23}(x-y)R_{13}(y)R_{12}(x) \quad (3)$$

を課す. ここで, $R_{12}(x)$, $R_{13}(x)$, $R_{23}(x)$ は $\text{End}(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$ に値を取る行列値関数であり, その添字は, どの $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ に R が作用するかを意味する.

$$R_{12}(x) := R(x) \otimes I$$

$$R_{23}(x) := I \otimes R(x)$$

$$R_{13}(x) := w_1(x) \cdot \left(\boxed{\text{フ}} \otimes I \otimes \boxed{\text{ヘ}} \right) + w_2(x) \cdot \left(\boxed{\text{ホ}} \otimes I \otimes \boxed{\text{マ}} \right) \\ + w_3(x) \cdot \left(\boxed{\text{ミ}} \otimes I \otimes \boxed{\text{ム}} \right) + w_4(x) \cdot \left(\boxed{\text{メ}} \otimes I \otimes \boxed{\text{モ}} \right)$$

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 7 問は次ページに続く.)

(2) ここからは, Yang-Baxter 方程式と呼ばれる関係式を満たす $R(x)$ の性質, およびその構成について考えていく.

実際に①を代入すると, Yang-Baxter 方程式③は以下の条件 (★) と同値であることがわかる.

条件 (★)

(1, 2, 3, 4) の全ての並び替え (i, j, k, l) に対し,

$$\begin{aligned} & w_k(x)w_l(y)w_j(x-y) + w_j(x)w_i(y)w_k(x-y) \\ & - w_l(x)w_k(y)w_i(x-y) - w_i(x)w_j(y)w_l(x-y) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

が成立する.

ここで, 異なる並び替えが同じ式を与えることがある. よって条件 (★) には冗長性が存在するため, その削減について考えていく. (i, j, k, l) を (1, 2, 3, 4) の任意の並び替えとして, 未知変数 T_1, T_2, T_3, T_4 に関する次の線型方程式を考える.

$$w_k(x)w_l(y)T_j + w_j(x)w_i(y)T_k - w_l(x)w_k(y)T_i - w_i(x)w_j(y)T_l = 0 \quad (5)$$

4 次対称群 $\mathfrak{S}_4$ の部分群 ヤ の任意の要素 τ について, (i, j, k, l) に対応する式⑤は, $(\tau(i), \tau(j), \tau(k), \tau(l))$ に対応する式⑤と同値である. よって, 各 (i, j, k, l) に対応する式⑤からなる 24 本の方程式系は, ユ 本の独立な方程式系へと簡約できる. さらに, これが必要十分な最小本数である. 置換の記法 $(i_1 i_2 \cdots i_n)$ については, 59 ページを参照せよ.

ヤ の解答群

- ① A_4 (交代群)
- ② $\{\text{id}, (12), (23), (31), (123), (321)\} (\cong \mathfrak{S}_3)$
- ③ $\{\text{id}, (12), (24), (41), (124), (421)\} (\cong \mathfrak{S}_3)$
- ④ $\{\text{id}, (13), (34), (41), (134), (431)\} (\cong \mathfrak{S}_3)$
- ⑤ $\{\text{id}, (23), (34), (42), (234), (432)\} (\cong \mathfrak{S}_3)$
- ⑥ $\{\text{id}, (1234), (13)(24), (1432)\} (\cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$
- ⑦ $\{\text{id}, (1324), (12)(34), (1423)\} (\cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$
- ⑧ $\{\text{id}, (1243), (14)(23), (1342)\} (\cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$
- ⑨ $\{\text{id}, (12)(34), (14)(23), (13)(24)\}$ (Klein の 4 元群)

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 7 問は次ページに続く.)

次に、条件 (★) の非自明な解を与えるための十分条件を見る。まず、次を準備する。

- 集合 X を次で定める。

$$X := \{(i, j, k, l) \mid i, j, k, l \in \{1, 2, 3, 4\} \text{ かつ } k \neq l\}$$

- 関数 $w_1(x), \dots, w_4(x)$ と $I := (i, j, k, l) \in X$ に対して、関数 $f_I(x)$ を以下で定める。

$$f_I(x) := \frac{w_i(x)^2 - w_j(x)^2}{w_k(x)^2 - w_l(x)^2}$$

- S を X の空でない部分集合とする。どの $I \in S$ に対しても関数 $f_I(x)$ が x に依存しないとき、「 $w_1, \dots, w_4$ は性質 S を持つ」と呼ぶこととする。

この性質に関して、以下の事実が知られている。

事実

$w_1, \dots, w_4$ が性質 X を持つならば、これらは条件 (★) の非自明な解を与える。つまり、組

$$(T_1, T_2, T_3, T_4) = (w_1(x - y), w_2(x - y), w_3(x - y), w_4(x - y))$$

は、簡約化された ユ 本の方程式系の $(0, 0, 0, 0)$ でない解を与える。

一方で、性質 X にも冗長性が存在する。例えば、すべての $i, j, k, l \in \{1, 2, 3, 4\}$ に対して

$$f_{(i,j,4,3)}(x) = f_{(i,j,k,l)}(x)f_{(k,l,4,3)}(x), \quad f_{(i,j,4,3)}(x) = -f_{(j,i,4,3)}(x)$$

が成り立つから、6 つの要素を持つ X の部分集合

$$S' := \{(i, j, 4, 3) \mid 1 \leq j < i \leq 4\}$$

を考えると、 $w_1, \dots, w_4$ が性質 S' を持つことは性質 X を持つことと同値である。

分子のみに注目して、 $w_i^2 - w_j^2$ が満たす線形関係式を、ある 6 列の行列 A

$$A \begin{pmatrix} w_2^2 - w_1^2 \\ w_3^2 - w_1^2 \\ w_3^2 - w_2^2 \\ w_4^2 - w_1^2 \\ w_4^2 - w_2^2 \\ w_4^2 - w_3^2 \end{pmatrix} = 0$$

と表現することを考える。このような行列 A は複数存在するが、そのうちで階数 $\text{rank } A$ が最大となるものは $\text{rank } A =$ ヨ を満たす。よって、 $w_1, \dots, w_4$ が性質 X を持つことと、性質 S' を持つことが同値となる (空でない) 部分集合 $S'' \subseteq S'$ のうちで、要素数 $|S''|$ が最小となるものは $|S''| =$ ラ を満たす。

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 7 問は次ページに続く.)

これまでの議論を踏まえ, Yang-Baxter 方程式を満たす $R(x)$ の構成について考察してみよう.

まず, 関数 $x(\cdot; k)$ を以下で定める.

$$x(s; k) := \int_0^s \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

ここで, $0 \leq k \leq 1$ は modulus パラメータと呼ばれる. この関数は定義域 $-1 \leq s \leq 1$ において狭義単調増加であり, その逆関数として **Jacobi の楕円関数** sn を定義する.

$$s = \text{sn}(x; k) \iff x = x(s; k)$$

また, 関数 cn , dn を次で定義する.

$$\text{cn}(x; k) := \sqrt{1 - \text{sn}^2(x; k)} \quad \text{dn}(x; k) := \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2(x; k)}$$

$k = 0$ の場合, $\text{sn}(x; 0) = \sin(x)$ であり, $\text{cn}(x; 0) = \cos(x)$ である. したがって, sn は三角関数のある種の拡張とみなすことができる. また $\text{dn}(x; 0) = 1$ で定数関数である.

$k = 1$ の場合には, $\text{sn}(x; 1) = \boxed{\text{リ}}$ である.

の解答群

① $\sin x$	① $\cos x$	② $\tan x$	③ $\cot x$
④ $\sinh x$	⑤ $\cosh x$	⑥ $\tanh x$	⑦ $\coth x$

今後, パラメータ k の引数としての明示を省略して $\text{sn}(x; k) = \text{sn}(x)$ などと書く.

$\text{sn}(x)$ について, 次の公式が成り立つ. これは $\sin(x)$ や に対する加法定理の一般化として解釈することもできる.

$$\text{sn}(x+y) = \frac{\text{sn}(x) \text{cn}(y) \text{dn}(y) + \text{sn}(y) \text{cn}(x) \text{dn}(x)}{1 - k^2 \text{sn}^2(x) \text{sn}^2(y)}$$

関数 $\text{sn}(x)$, $\text{cn}(x)$, および $\text{dn}(x)$ は, その定義域を実数全体に周期的に拡張することが可能であり, 拡張後もこの加法定理を満たすことが知られている.

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 7 問は次ページに続く.)

Jacobi の楕円関数を用いて

$$\begin{aligned} a(x) &= \operatorname{sn}(x + \eta), \\ b(x) &= \operatorname{sn}(x), \\ c(x) &= \operatorname{sn}(\eta), \\ d(x) &= k \operatorname{sn}(\eta) \operatorname{sn}(x) \operatorname{sn}(x + \eta) \end{aligned}$$

より与えられる①の行列値関数 $R(x)$ を考える. ただし η は変数 x には依存しない定数とする. このとき,

$$f_{(4,1,4,3)}(x) = \frac{w_4(x)^2 - w_1(x)^2}{w_4(x)^2 - w_3(x)^2} = \frac{a(x)^2 + b(x)^2 - c(x)^2 - d(x)^2}{2a(x)b(x)} + 1 - \frac{c(x)d(x)}{a(x)b(x)}$$

であり, 右辺の各項について,

$$\frac{a(x)^2 + b(x)^2 - c(x)^2 - d(x)^2}{2a(x)b(x)} = \boxed{\text{ル}}, \quad \frac{c(x)d(x)}{a(x)b(x)} = k \operatorname{sn}^2(\eta)$$

となる. したがって, $f_{(4,1,4,3)}(x)$ は変数 x に依存しない.

ル の解答群

① $\operatorname{sn}(\eta) \operatorname{cn}(\eta) \operatorname{dn}(\eta)$	② $\operatorname{sn}(\eta) \operatorname{cn}(\eta)$	③ $\operatorname{cn}(\eta) \operatorname{dn}(\eta)$	④ $\operatorname{sn}(\eta) \operatorname{dn}(\eta)$
⑤ $\operatorname{sn}(\eta)$	⑥ $\operatorname{cn}(\eta)$	⑦ $\operatorname{dn}(\eta)$	⑧ 1

同様の議論から, 各 $I \in S''$ に対する $f_I(x)$ がいずれも変数 x に依存しないことが確認できる. したがって, $w_1, \dots, w_4$ は性質 X を持ち, 条件 $(\star)$ を満たす. つまり,

$$R(x) = \begin{pmatrix} \operatorname{sn}(x + \eta) & 0 & 0 & k \operatorname{sn}(\eta) \operatorname{sn}(x) \operatorname{sn}(x + \eta) \\ 0 & \operatorname{sn}(x) & \operatorname{sn}(\eta) & 0 \\ 0 & \operatorname{sn}(\eta) & \operatorname{sn}(x) & 0 \\ k \operatorname{sn}(\eta) \operatorname{sn}(x) \operatorname{sn}(x + \eta) & 0 & 0 & \operatorname{sn}(x + \eta) \end{pmatrix}$$

は, Yang-Baxter 方程式の解を与える.

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 7 問は次ページに続く.)

第 7 問における置換の記法について

N 次対称群 $\mathfrak{S}_N$ の元について以下のような記号を用いる. $i_1, i_2, \dots, i_n \in \{1, 2, \dots, N\}$ を相異なる元としたとき, $(i_1 \ i_2 \ \dots \ i_n) \in \mathfrak{S}_N$ とは

$$j \mapsto \begin{cases} i_1 & (j = i_n), \\ i_{k+1} & (j = i_k, \ k = 1, 2, \dots, n-1), \\ j & (j \neq i_k, \ k = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

で表される $\{1, 2, \dots, N\}$ の巡回置換を表す.

第8問 (配点 50)

現代の学術研究において、論文を定量的に評価する指標として最も広く用いられているものの一つが被引用数である。分野の異なる論文同士を単純に被引用数の多寡だけで比較するのは適切ではないが、多くの研究に引用されている論文は分野全体への影響力が大きく優れた研究成果であるという共通理解のもと、論文やその著者の研究の重要性を測る基本的な指標として活用されてきた。

図 15 は、学術文献プラットフォーム CiteSeer に登録されている 38 万本以上の論文について、被引用数の確率分布をプロットしたものである*1。分布の厳密な推定には統計的分析が必要であるが、両対数グラフ上においておおよそ直線上に並んでいることが確認できる。最も多く引用された論文が 1700 回以上の被引用を記録していた一方で、平均被引用数はわずか約 9.1 にとどまっていた。すなわち、殆どの論文がほんの僅かしか引用されない一方で、ごく一部の論文が非常に多く引用されていることがわかる。このような分布がどのようにして発生するのかについて、論文を頂点・引用関係を辺とするグラフでモデリングして考察する。(グラフ理論の用語については、27 ページの補足を参照してもよい。)

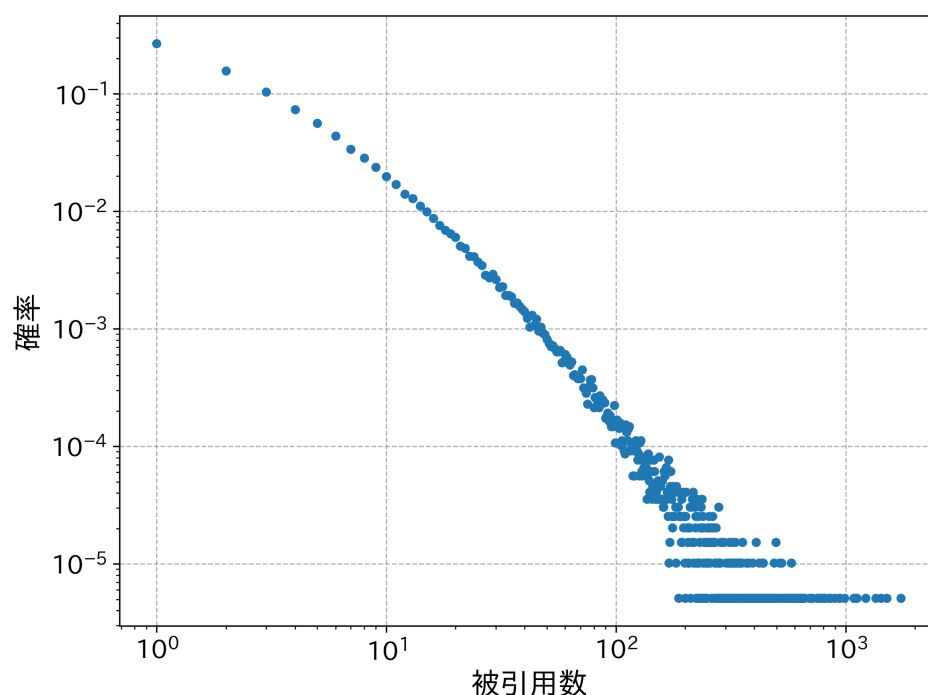


図 15: CiteSeer における被引用数の確率分布

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 8 問は次ページに続く.)

*1 データは <http://konect.cc/networks/citeseer/> より取得

(1)

アイデア 1: 高度に専門化した現代の学術構造においては、同一分野内であっても異なる領域の研究を包括的に理解することは難しい。このような状況下では、細分化された多くの研究領域における論文の集合をマクロな視点から俯瞰したとき、各論文は他と独立に引用関係を形成していると仮定できるのではないだろうか。

上記のアイデアを以下のようなモデルで実装する。

モデル 1

正の整数 n を与え、頂点集合を $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ とする。このとき、 V を頂点集合に持つすべての単純無向グラフの集合を

$$\mathcal{G} := \left\{ G = (V, E) \mid E \subseteq \binom{V}{2} \right\}$$

と定義する。 $p \in [0, 1]$ を固定し、 $\mathcal{G}$ からランダムにグラフを一つ選ぶことを考える。このとき、 $(V, E) \in \mathcal{G}$ が選ばれる確率は

$$\mathbb{P}(\{(V, E)\}) = p^{|E|} (1 - p)^{\binom{V}{2} - |E|}$$

であるとする。

すなわち、グラフ内の頂点数を固定した上で、各辺を互いに独立に確率 p で生成することにより、グラフ全体を確率的に構成する。頂点数 n を無限大に近づけたときのモデル 1 における次数分布を解析することで、アイデア 1 の妥当性を評価しよう。

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 8 問は次ページに続く.)

任意の頂点 $v \in V$ を 1 つ固定し, G における v の次数を表す確率変数を X とする. このとき,

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{\boxed{\text{ア}}}{k} \left(\boxed{\text{イ}} \right)^k \left(1 - \boxed{\text{イ}} \right)^{\boxed{\text{ア}} - k}$$

である. ただし k は $0 \leq k \leq \boxed{\text{ア}}$ を満たす整数である.

例えば $n = 1000$, 期待値 $\mathbb{E}[X] = 4.5$ である場合, p を有効数字 2 桁で表示したものは

$$\boxed{\text{ウ}} \cdot \boxed{\text{エ}} \times 10^{\boxed{\text{オカ}}}$$

と表せる. すなわち, 1 以上 10 未満の実数 a と整数 b を用いて $p = a \times 10^b$ と表したとき, a を少数第 2 位で四捨五入した値は $\boxed{\text{ウ}} \cdot \boxed{\text{エ}}$ であり, $b = \boxed{\text{オカ}}$ である. また, 一般の n, p に対し, X は分散

$$\mathbb{V}[X] = \left(\boxed{\text{キ}} \right) \cdot \left(\boxed{\text{ク}} \right)$$

を持ち, $\boxed{\text{ケ}}$ 分布に従う.

$\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{キ}}$ の解答群

① n	② $n - 1$	③ $n(n - 1)$	④ n^2	⑤ $n^2 - 1$
⑥ $\frac{n}{2}$	⑦ $\frac{n - 1}{2}$	⑧ $\frac{n(n - 1)}{2}$	⑨ $\frac{n^2}{2}$	⑩ $\frac{n^2 - 1}{2}$

$\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ク}}$ の解答群

① p	② $1 - p$	③ p^2	④ $(1 - p)^2$	⑤ $p(1 - p)$
-------	-----------	---------	---------------	--------------

$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群

① 正規 (Gauss)	② 対数正規	③ 二項	④ 負の二項	⑤ 幾何
⑥ 超幾何	⑦ ベータ	⑧ 指数	⑨ Poisson	⑩ Lévy

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 8 問は次ページに続く.)

いま、興味があるのは X の分布の漸近挙動である。図 15 の分布を実現するアイデアとして、辺の数はランダウの記号を用いると $O(n)$ 程度であり、取りうる最大の辺の数 $n(n-1)/2$ 本 ($O(n^2)$) に比べて十分小さいことに注目する。したがって、興味のあるグラフは疎であるとみなせる。

そこで、今度は n および p が

$$\lambda = \left(\boxed{\text{ア}} \right) \left(\boxed{\text{イ}} \right) \quad (\lambda \text{ は正の定数})$$

という関係式を満たすもとで考える。 v の次数を表す確率変数 X を改めて X_n と表記するとき、 λ を固定したまま $n \rightarrow \infty$ の極限を取ると、確率変数列 X_n は期待値 $\boxed{\text{コ}}$ 、分散 $\boxed{\text{サ}}$ の $\boxed{\text{シ}}$ 分布へと分布収束する。しかし、これは図 15 中の分布と比較すると形状が大きく異なっており、モデル 1 では引用メカニズムを実現できていないと考えられる。

$\boxed{\text{コ}}$ 、 $\boxed{\text{サ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

① λ	① λ^2	② $\frac{\lambda}{2}$	③ $\frac{\lambda^2}{2}$	④ ∞
⑤ $\frac{1}{\lambda}$	⑥ $\frac{1}{\lambda^2}$	⑦ $\frac{2}{\lambda}$	⑧ $\frac{2}{\lambda^2}$	⑨ なし

$\boxed{\text{シ}}$ の解答群

① 正規 (Gauss)	① 対数正規	② 二項	③ 負の二項	④ 幾何
⑤ 超幾何	⑥ ベータ	⑦ 指数	⑧ Poisson	⑨ Lévy

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 8 問は次ページに続く.)

(2)

アイデア 2: 研究や勉強を行う際には、まず評判を調べてから読む順番を決定することが多い。したがって、新しい論文が発表される際に既に被引用数の多い論文が引用される確率は、被引用数の少ない論文が引用される確率よりも高くなると考えられる。

上記のアイデアを以下のようなモデルで実装する。

モデル 2

初期状態として、 $m_0 \geq 2$ 個の頂点からなる完全グラフ $G_0 := K_{m_0}$ を与え、その頂点集合を $V_0 = \{v_1, \dots, v_{m_0}\}$ とする。各時刻 $t = 1, 2, \dots$ におけるグラフを G_t 、その頂点集合を

$$V_t := \{v_1, \dots, v_{m_0}, v_{m_0+1}, \dots, v_{m_0+t}\}$$

と表す。 G_t は G_{t-1} に対し、次の手順 1, 2, 3 によって構成されるものとする。ここで m は $0 < m \leq m_0$ を満たす t によらない定数である。

1. G_{t-1} に新しい頂点 $v^* = v_{m_0+t}$ を 1 つ追加する。
2. G_{t-1} の頂点集合 V_{t-1} から、非復元抽出で異なる m 頂点を逐次的に選ぶ。ただし、 $j-1$ 回目までに選ばれた頂点が $w_1, \dots, w_{j-1}$ であったとき、 j 回目の抽出で $u \in V_{t-1} \setminus \{w_1, \dots, w_{j-1}\}$ が選ばれる確率は

$$\frac{\deg_{G_{t-1}}(u)}{\sum_{w \in V_{t-1}} \deg_{G_{t-1}}(w) - \sum_{i=1}^{j-1} \deg_{G_{t-1}}(w_i)} \quad (1)$$

といった、 u の度数に比例した式により与えられる。

3. m 回の抽出のあと、 v^* と選ばれた m 個の頂点の間に辺を加えてできるグラフを G_t とする。

すなわち、時間の経過とともにグラフの頂点数が増加し、新しい頂点が既存の頂点とその度数に応じて確率的に接続されることで辺が追加されるモデルである。 $t \rightarrow \infty$ とし、 G_t の頂点数 $|V_t| = m_0 + t$ を無限大に近づけたときのモデル 2 における度数分布を解析することで、アイデア 2 の妥当性を評価しよう。

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 8 問は次ページに続く.)

以下 $1 \leq s \leq t$ とする. 時刻 s で新たに加わった頂点 v_{m_0+s} の, 時刻 t での次数が k である確率 $\mathbb{P}(\deg_{G_t}(v_{m_0+s}) = k)$ を $p(k, s, t)$ とおく.

$p(k, s, t)$ の $t \rightarrow \infty$ における漸近挙動について調べるために, 次の近似を考える.

- G_{t-1} の総次数は

$$\sum_{v \in V_{t-1}} \deg_{G_{t-1}}(v) = m_0(m_0 - 1) + \boxed{\text{ス}} m(t - 1)$$

である. よって, ①の確率で分子を k とおいたものは

$$\frac{k}{\boxed{\text{ス}} m(t - 1)} \quad \text{②}$$

と近似される. 式②を $\Pi_k(t)$ とおき, 各抽出における次数 k の頂点 $u \in V_{t-1}$ を選ぶ確率として統一的に扱う.

- 1 以上の定数 r に対して, 次の近似が成り立つ.

$$(1 - \Pi_k(t))^r \approx 1 - r\Pi_k(t)$$

これらを用いて, $p(k, s, t)$ に関して近似的に成り立つ漸化式

$$p(k, s, t+1) \approx m \left(\boxed{\text{セ}} \right) \cdot \left(\boxed{\text{ソ}} \right) + \left[1 - m \left(\boxed{\text{タ}} \right) \right] \cdot \left(\boxed{\text{チ}} \right) \quad \text{③}$$

が得られる. 解答群より最も適切なものを選択せよ.

$\boxed{\text{セ}}$, $\boxed{\text{タ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

① $\Pi_{k-1}(t)$	④ $\Pi_{k-1}(t+1)$	⑦ $1 - \Pi_k(t+1)$
② $1 - \Pi_{k-1}(t)$	⑤ $1 - \Pi_{k-1}(t+1)$	⑧ $\Pi_{k+1}(t+1)$
③ $\Pi_k(t)$	⑥ $\Pi_k(t+1)$	⑨ $1 - \Pi_{k+1}(t+1)$

$\boxed{\text{ソ}}$, $\boxed{\text{チ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

① $p(k-1, s, t)$	④ $p(k-1, s, t+1)$	⑦ $1 - p(k, s, t+1)$
② $1 - p(k-1, s, t)$	⑤ $1 - p(k-1, s, t+1)$	⑧ $p(k+1, s, t+1)$
③ $p(k, s, t)$	⑥ $p(k, s, t+1)$	⑨ $1 - p(k+1, s, t+1)$

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 8 問は次ページに続く.)

近似式③を式②によって k, s, t で表示すると、以下を得る.

$$p(k, s, t+1) - p(k, s, t) \approx \frac{1}{\boxed{\text{ツ}}_t} \left[\left(\boxed{\text{テ}} \right) \left(\boxed{\text{ソ}} \right) - \left(\boxed{\text{ト}} \right) \left(\boxed{\text{チ}} \right) \right] \quad ④$$

次に、時刻 t での次数分布

$$P(k, t) := \frac{1}{t} \sum_{s=1}^t p(k, s, t)$$

については、式④より

$$(t+1)P(k, t+1) - tP(k, t) \approx \frac{1}{\boxed{\text{ツ}}} \left[\left(\boxed{\text{ナ}} \right) P(k-1, t) - \left(\boxed{\text{ニ}} \right) P(k, t) \right] + \delta_{k,m}$$

が成り立つ. ただし、 $\delta_{k,m}$ は Kronecker のデルタである.

以上より、頂点数を無限大に近づけたときの次数分布 $P(k) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(k, t)$ についてが成り立つ.

$$P(k) = \begin{cases} \begin{cases} \boxed{\text{ヌ}} \\ \boxed{\text{ネ}} \end{cases} P(k-1) & (k > m \text{ のとき}) \\ \begin{cases} \boxed{\text{ノ}} \\ \boxed{\text{ネ}} \end{cases} & (k = m \text{ のとき}) \end{cases}$$

$\boxed{\text{テ}} \sim \boxed{\text{ネ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

④	$k-4$	①	$k-3$	②	$k-2$	③	$k-1$	④	k
⑤	$k+1$	⑥	$k+2$	⑦	$k+3$	⑧	$k+4$	⑨	$k+5$

これより、 $P(k)$ ($k \geq m$) は k, m を用いて、以下で与えられる.

$$P(k) = \frac{\boxed{\text{ハ}} \left(\boxed{\text{ヒ}} \right) \left(\boxed{\text{フ}} \right)}{\left(\boxed{\text{ヘ}} \right) \left(\boxed{\text{ホ}} \right) \left(\boxed{\text{マ}} \right)} \quad ⑤$$

$\boxed{\text{ヒ}} \sim \boxed{\text{マ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい. ただし分子と分母に対応する選択肢の番号は、それぞれ昇順に記入すること.)

④	$k-2$	①	$k-1$	②	k	③	$k+1$	④	$k+2$
⑤	$m-2$	⑥	$m-1$	⑦	m	⑧	$m+1$	⑨	$m+2$

(OnlineMathContest — Proxima Technology 杯第 8 問は次ページに続く.)

図 15 に示された被引用数分布の実データでは、両対数グラフ上でおよそ直線上に点が並んでいた。同様に、式⑤を両対数グラフ上にプロットすると、 $k \rightarrow \infty$ において漸近的に傾き $\boxed{\text{ミ}}$ の直線となる。これは図 15 に見られる減少傾向と整合的であり、モデル 2 が現実の引用メカニズムを一定程度捉えていることを表している。

$\boxed{\text{ミ}}$ の解答群

①	$-e$	②	-1	③	-2	④	-3	⑤	-4
⑥	$-e-1$	⑦	$-e+1$	⑧	$-\pi-1$	⑨	$-\pi$	⑩	$-\pi+1$

学术论文の引用関係に限らず、Web のハイパーリンク構造、SNS におけるフォロー関係、タンパク質間相互作用ネットワーク、さらには脳神経回路網など、様々な分野における実世界の現象はグラフ構造としてモデリングされており、その多くにおいて次数が裾の重い分布に従うことが経験的に知られている。このような分布構造の背景を説明する原理として広く受け入れられているのが、モデル 2 のような優先的選択 (**preferential attachment**) という単純な接続ルールであり、次数分布というマクロスケールの構造が、ミクロスケールにおける局所的かつ素朴な生成過程から創発されうることが示唆されている。