Proxima

第 1 回
Online Math Contest
Proxima Technology 杯

本選

2024 年 11 月 23 日 10:00–20:00

第 1 問

$\mathbb{C}$ を複素数体, R を $\mathbb{C}$ 代数 $\mathbb{C}[X,Y]/(X^6+Y^2+1)$, K を R の商体とする. 以下の問いについて, 導出過程を説明しつつ解答を記述せよ.

(1) $\mathbb{C}$ 上の射影代数曲線 $\operatorname{Proj}\mathbb{C}[X,Y,Z]/(X^6+Y^2Z^4+Z^6)$ を C' とし, C' の正規化として得られる $\mathbb{C}$ 上の射影代数曲線を C とする. C' と C の算術種数を求めよ.

(2) R, K の $\mathbb{C}$ 代数としての自己同型群 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(R)$, $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(K)$ の位数を求めよ.

(3) 体の拡大 $\mathbb{C}\subset K$ の中間体 L であって, 次の性質 (i) を満たすものの個数を求めよ.

　(i) $[K:L]=2$ であり, かつ L は $\mathbb{C}$ 上の種数 1 の滑らかな連結固有代数曲線の関数体と $\mathbb{C}$ 代数として同型である.

第 2 問

区間 $(0,\pi)$ 上のユークリッド計量を g_0, 半径 1 の円周 $S^1 := \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : x_1^2+x_2^2=1\}$ の標準計量 (ユークリッド計量の引き戻し計量) を g_{S^1} と表す. 区間 $(0,\pi)$ 上の正値 C^∞ 関数 $\psi\colon (0,\pi)\to\mathbb{R}_{>0}$ について, 積多様体 $M := (0,\pi)\times S^1$ 上のリーマン計量 g_ψ を (v_1,w_1), $(v_2,w_2)\in T_u(0,\pi)\times T_xS^1$ ($u\in(0,\pi)$, $x\in S^1$) に対して

$$g_\psi((v_1,w_1),(v_2,w_2)) := g_0(v_1,v_2)+\psi(u)^2 g_{S^1}(w_1,w_2)$$

となるように定める. また, 各正の整数 $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対して関数 $\psi_n\colon (0,\pi)\to\mathbb{R}_{>0}$ を

$$\psi_n(u) := \left(u-\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{1}{n}$$

と定める.

ここで, リーマン計量 g に対するリーマン曲率テンソル R_g はベクトル場 X, Y, Z に対して $R_g(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_YZ-\nabla_Y\nabla_XZ-\nabla_{[X,Y]}Z$ (∇ は Levi-Civita 接続) を満たすように定まるものとし, 点 $p\in M$ におけるスカラー曲率 $\mathrm{Scal}_g(p)$ は, T_pM の正規直交基底 e_1, e_2 を用いて

$$\mathrm{Scal}_g(p) := \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} g(R_g(e_i,e_j)e_j,e_i)$$

と計算されるものとする.

次ページの問いについて, 導出過程を説明しつつ解答を記述せよ.

(OMC Proxima Technology 杯 本選 第 2 問は次ページに続く.)

(1) $n=1$ とした場合の計量 g_{ψ_1} について

$$\sup_{p\in M} \mathrm{Scal}_{g_{\psi_1}}(p)$$

および

$$\inf_{p\in M} \mathrm{Scal}_{g_{\psi_1}}(p)$$

を求めよ．

(2) $n\to\infty$ とした場合の極限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{p\in M} \mathrm{Scal}_{g_{\psi_n}}(p)\right)$$

および

$$\lim_{n\to\infty}\left(\inf_{p\in M} \mathrm{Scal}_{g_{\psi_n}}(p)\right)$$

を求めよ．

(3) 滑らかな関数 $\phi\colon (0,\pi)\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ を

$$\phi(u)=\begin{cases}1 & (2\pi/5\leq u\leq 3\pi/5)\\ 0 & (u\leq \pi/5 \text{ または } u\geq 4\pi/5)\end{cases}$$

で $u\in(\pi/5,2\pi/5)\cup(3\pi/5,4\pi/5)$ のとき $0<\phi(u)<1$ となるように取る．各正の整数 $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対して関数 $\overline{\psi}_n\colon(0,\pi)\to\mathbb{R}_{>0}$ を

$$\overline{\psi}_n(u):=(1-\phi(u))\sin(u)+\phi(u)\psi_n(u)$$

と定める．このとき計量 $g_{\overline{\psi}_n}$ は S^2 上の計量 g_n に拡張される．すなわち次が成り立つ．$[0,\pi]\times S^1$ 上の同値関係を $(0,x_1)\sim(0,x_2)$ および $(\pi,x_1)\sim(\pi,x_2)$ $(x_1,x_2\in S^1)$ として定める (その他の同値な元は自明なもの $(u,x)\sim(u,x)$ に限る) と，同相写像 $\Psi\colon([0,\pi]\times S^1)/\sim\to S^2$ および S^2 上の滑らかなリーマン計量の列 $\{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{>0}}$ で次の条件 (i) を満たすものが存在する．

(i) 各 n について $\Psi|_M\colon(M,g_{\overline{\psi}_n})\to(S^2,g_n)$ はリーマン等長写像である．ただし $M\subset([0,\pi]\times S^1)/\sim$ とみなした．

このとき，関数に作用するリーマン計量 g_n に関するラプラシアンの第一固有値 $\lambda_1(g_n)$ について

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_1(g_n)$$

を求めよ．ただし S^2 上のリーマン計量 g についてラプラシアンの第一固有値は

$$\lambda_1(g)=\inf\{\lambda\in\mathbb{R}_{\neq 0} : \text{非ゼロ } C^\infty \text{ 関数 } f\colon S^2\to\mathbb{R} \text{ が存在して } \Delta_g f=\lambda f\}$$

のように定まる．ここでラプラシアンは $\Delta_g f:=-\mathrm{tr}(\nabla\,\mathrm{grad}\,f)$ のように定めており，$\mathrm{grad}\,f$ は関数 f のグラディエントベクトル場を，∇ は Levi-Civita 接続を表す．

第 3 問

(I) 以下の文章を読み, (1)〜(3) に答えよ. 各問いについて, 解答に至る計算過程も示すこと.

実数上の関数 f を次の広義 Riemann 積分により定義する:

$$f(x) = \int_0^\infty \cos\left(tx - \frac{t^3}{3}\right) dt. \qquad ①$$

関数 f は微分方程式

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = -xf(x)$$

を満たすことが知られている. さらに関数 f は整関数に延長可能であることが知られており, 以下ではこの整関数を再び f と表す. この (延長された) 関数 f も同様に微分方程式

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} = -zf(z)$$

を満たす.

この整関数 f の零点は正の実数のみであり, またそれらは (可算) 無限個あることが知られている. f の零点を値が小さい方から $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots$ とする. すなわち, f の零点を

$$0 < \rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \cdots$$

を満たすようにおく. これらの f の零点を用いて, f に関する無限級数 ζ_f を次のように定める:

$$\zeta_f(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\rho_n^s}.$$

(1) 式①の定義に従い, $f(0)$, $f'(0)$ の値をそれぞれガンマ関数 $\Gamma(z)$ の値を用いて表わせ. ただし, f' が f の定義における広義 Riemann 積分を x について積分記号下で微分したものと一致することは断りなく用いてよい.

(2) 整関数 f の増大度 ρ を求めよ. ただし, f の増大度 ρ は次で計算できることは断りなく用いてよい:

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{n\log n}{\log\left|\dfrac{n!}{f^{(n)}(0)}\right|} & (f^{(n)}(0) \neq 0); \\ 0 & (f^{(n)}(0) = 0), \end{cases}$$
$$\rho = \limsup_{n\to\infty} c_n.$$

(3) $\zeta_f(2)$, $\zeta_f(3)$, $\zeta_f(4)$ の値を $\gamma := f'(0)/f(0)$ を用いて表せ.

(OMC Proxima Technology 杯 本選 第 3 問は次ページに続く.)

(II) 以下の位相空間 X_1, X_2, X_3 はそれぞれ Baire 空間であるか否か, 証明付きで答えよ. ただし, 完備距離空間や局所コンパクト Hausdorff 空間が Baire 空間であることは証明なしに用いて良いものとする.

1. 可算無限次元実 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の単位球面 $\{h \in \mathcal{H} \mid \|h\| = 1\}$ に弱位相を入れた空間 X_1.
2. 単位閉区間 $[0,1]$ 上の正値確率 Radon 測度全体の集合 $\mathrm{Prob}[0,1]$ に弱収束により定まる位相を入れた空間 X_2. ここで, 正値確率 Radon 測度のネット $(P_i)_{i\in I} \subset \mathrm{Prob}[0,1]$ が $P \in \mathrm{Prob}[0,1]$ に弱収束するとは, 任意の連続関数 $f \in C[0,1]$ について $\lim_{i\in I} \int f\,dP_i = \int f\,dP$ であることとする.
3. 整関数全体の集合 $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ をコンパクト開位相により位相空間とみなす. 周期関数全体のなす $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ の部分空間 X_3. ただし, $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ が周期関数であるとは, ある $\tau \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ が存在して $f(z) = f(z+\tau)$ が任意の $z \in \mathbb{C}$ について成立することをいう.
   解答において次の事実は断りなく用いて良い: $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ の部分集合 F について以下は同値である.
   - F は閉集合である.
   - 広義一様収束する整関数列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ に対し, 任意の f_n が F に属するなら, その (広義一様) 収束先も F に属する.

第 4 問

情報理論において, 二つの確率分布 p, q の距離のような尺度の一つに Kullback–Leibler ダイバージェンスというものがある. Kullback–Leibler ダイバージェンスは単なる情報理論における尺度に留まらず, 近年は機械学習においても用いられる重要な尺度の一つである. 古典的な情報理論における Kullback–Leibler ダイバージェンスは, 量子情報理論などにおいては相対エントロピーと呼ばれることがある. ここではより一般的な相対エントロピーについて議論をしていく.

以下の文章を読み, **設問** (1)〜(8) に答えよ.

V を複素線形空間とする. $\alpha\colon V\times V\longrightarrow\mathbb{C}$ が V 上のエルミート形式であるとは, 以下の 3 条件 (条件 1 と条件 2 は条件 3 よりどちらか一方で十分) を満たすことである: 任意の x, y, $z\in V$ と $c\in\mathbb{C}$ に対して,

1. $\alpha(x,cy+z)=c\alpha(x,y)+\alpha(x,z)$ (第二変数に関する線形性),
2. $\alpha(cx+y,z)=\bar{c}\alpha(x,z)+\alpha(y,z)$ (第一変数に関する共役線形性),
3. $\overline{\alpha(x,y)}=\alpha(y,x)$ (エルミート対称性).

Ⓐエルミート形式 α はすべての $(x,x)\in V\times V$ に対する値 $\alpha(x,x)\in\mathbb{R}$ を定めることにより, 一意的にすべての $(x,y)\in V\times V$ に対する値 $\alpha(x,y)\in\mathbb{C}$ が定まる.

V 上のエルミート形式 α が**半正定値**であるとは, 任意の $x\in V$ に対して, $\alpha(x,x)\geq 0$ が成立することである. 半正定値エルミート形式をここでは**半正定値形式**と呼ぶこととする. V 上の半正定値形式全体を $\mathcal{F}_+(V)$ と表すこととし, α, $\beta\in\mathcal{F}_+(V)$ に対して, $\alpha\geq\beta$ であることを $\alpha(x,x)\geq\beta(x,x)$ がすべての $x\in V$ に対して成立することと定める. 自然な和と非負のスカラー倍の構造 ($(\alpha+\beta)(x,y)=\alpha(x,y)+\beta(x,y)$, $(c\alpha)(x,y)=c\alpha(x,y)$, $c\geq 0$) により, $\mathcal{F}_+(V)$ は凸錐である.

α, β を V 上の半正定値形式とする. α, β に対して定まる $\mathcal{F}_+(V)$ の部分集合 $S_{\alpha,\beta}$ を

$$|\gamma(x,y)|^2\leq\alpha(x,x)\beta(y,y),\qquad x,y\in V$$

を満たす半正定値形式 γ 全体の集合とする. このとき, 次を満たす半正定値形式 $\sqrt{\alpha\beta}\in\mathcal{F}_+(V)$ が存在することが知られている:

$$\sqrt{\alpha\beta}(x,x)=\sup_{\gamma\in S_{\alpha,\beta}}\gamma(x,x),\qquad x\in V.$$

(下線部Ⓐよりこの式を満たす半正定値形式は一意的であることに注意する.) この $\sqrt{\alpha\beta}$ を α と β の**幾何平均**と呼ぶ.

(OMC Proxima Technology 杯 本選 第 4 問は次ページに続く.)

では次に, 実数 $t \in [0,1]$ でパラメトライズされた半正定値形式 $\mathrm{QI}_t(\alpha,\beta)$ を次の 4 条件を満たすものとする:

1. $t \in [0,1] \longmapsto \mathrm{QI}_t(\alpha,\beta)(x,x)$ という写像はすべての $x \in V$ で連続である,
2. $\mathrm{QI}_{(t_1+t_2)/2}(\alpha,\beta) = \sqrt{\mathrm{QI}_{t_1}(\alpha,\beta)\mathrm{QI}_{t_2}(\alpha,\beta)}$ がすべての t_1, $t_2 \in [0,1]$ に対して成り立つ,
3. $\mathrm{QI}_{1/2}(\alpha,\beta) = \sqrt{\alpha\beta}$,
4. $\mathrm{QI}_{t/2}(\alpha,\beta) = \sqrt{\alpha\mathrm{QI}_t(\alpha,\beta)}$, $\mathrm{QI}_{(1+t)/2}(\alpha,\beta) = \sqrt{\mathrm{QI}_t(\alpha,\beta)\beta}$ がすべての $t \in [0,1]$ に対して成り立つ.

この $\mathrm{QI}_t(\alpha,\beta)$ を α から β までの**二次補間形式**という. これは一意的に存在し, Ⓑ<u>次の性質が成り立つ.</u>

(a) すべての t について, $\mathrm{QI}_t(\alpha,\beta) = \mathrm{QI}_{1-t}(\beta,\alpha)$ が成り立つ.

(b) $x_0 \in V$ を一つ固定する. ある $t_0 \in [0,1]$ で $\mathrm{QI}_{t_0}(\alpha,\beta)(x_0,x_0) = 0$ ならば任意の $t \in [0,1]$ で $\mathrm{QI}_t(\alpha,\beta)(x_0,x_0) = 0$ である.

ここで二次補間形式の具体例を一つ紹介する.

(i) $V = \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ とし, A, $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ を半正定値行列とする. 半正定値形式 α, β を X, $Y \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ に対して, $\alpha(X,Y) = \mathrm{Tr}(X^*AY)$, $\beta(X,Y) = \mathrm{Tr}(X^*YB)$ と定めたときの二次補間形式は,

$$\mathrm{QI}_t(\alpha,\beta)(X,Y) = \mathrm{Tr}(X^*A^{1-t}YB^t)$$

である.

ただし, 半正定値行列 A, B に対しての A^{1-t} や B^t については, $f(\lambda) = \lambda^{1-t}$ や $f(\lambda) = \lambda^t$ による関数カルキュラスとして定める. また, 0 乗については, $0^0 = 0$ と定める, すなわち,

$$\lambda^0 = \begin{cases} 1 & (\lambda > 0) \\ 0 & (\lambda = 0) \end{cases}$$

とする. ここで任意の実数値関数 $f\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ に対して, 半正定値行列 A の関数カルキュラス $f(A)$ とは, 半正定値行列 A のスペクトル分解を $A = \sum_{\lambda\in\sigma(A)} \lambda P_\lambda$ としたとき,

$$f(A) = \sum_{\lambda\in\sigma(A)} f(\lambda)P_\lambda$$

で定まる (エルミート) 行列 $f(A)$ のことである.

(OMC Proxima Technology 杯 本選 第 4 問は次ページに続く.)

ここから少し話は変わって, 二つの正定値形式の相対エントロピーを考えていく. $\alpha,\ \beta \in \mathcal{F}_+(V)$ とする. α と β の**相対エントロピー関数** $D(\alpha||\beta)\colon V \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ を

$$D(\alpha||\beta)(x) = -\lim_{t\to+0}\frac{\mathrm{QI}_t(\alpha,\beta)(x,x)-\alpha(x,x)}{t}, \qquad x\in V$$

と定める. Ⓒこの右辺の極限は任意の $x\in V$ に対して存在することが確かめられる. 相対エントロピーの性質はいくつかあるが, そのうち二つの重要な不等式が成り立つことを紹介する.

(I) (同時凸性) 任意の $x\in V$ について,

$$(\alpha,\beta)\in\mathcal{F}_+(V)\times\mathcal{F}_+(V)\longmapsto D(\alpha||\beta)(x)\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$$

という写像は $\alpha,\ \beta$ に関して同時凸である. ここで $\alpha,\ \beta$ に関して同時凸とは, 任意の $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2\in\mathcal{F}_+(V)$ と任意の $s\in[0,1]$ に対して,

$$D(s\alpha_1+(1-s)\alpha_2||s\beta_1+(1-s)\beta_2)(x)\le sD(\alpha_1||\beta_1)(x)+(1-s)D(\alpha_2||\beta_2)(x) \qquad ①$$

が成り立つことである.

(II) (Peierls–Bogoliubov の不等式) 任意の $x\in V$ に対して,

$$D(\alpha||\beta)(x)\ge\alpha(x,x)\log\alpha(x,x)-\alpha(x,x)\log\beta(x,x) \qquad ②$$

が成り立つ. ここで右辺については, $0\log 0-0\log\mu=0\quad(\mu\ge 0)$, $\lambda\log\lambda-\lambda\log 0=\infty$ $(\lambda>0)$ とする.

(OMC Proxima Technology 杯 本選 第 4 問は次ページに続く.)

では最後に, 量子情報理論での相対エントロピーの話をしていく．以下では, A, $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ を半正定値かつ $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B) = 1$ を満たす行列とする．このような行列はしばしば**状態**や**密度行列**と呼ばれる．二つの状態 A と B の**相対エントロピー**は, 関数カルキュラスを用いて

$$D(A||B) := \begin{cases} \mathrm{Tr}(A\log A - A\log B) & (A^0 \leq B^0) \\ \infty & (A^0 \not\leq B^0) \end{cases}$$

で定義される．ここで, A が半正定値行列であるとき, $A \geq 0$ と表し, エルミート行列 A, B に対して, $A \geq B$ であることを $A - B \geq 0$ で定義する．また, $A^0 \leq B^0$ のときの $A\log B$ については $A\log B = \lim_{\varepsilon\to+0} A\log(B+\varepsilon I)$ とする．$\log A$ や $\log B$ はすべての状態 A, B に対して定まるものではないが, ここでの相対エントロピーはすべての状態 A, B に対して定まる．

量子情報理論で考えられる二つの状態 A, B に対する相対エントロピーは, これまで考えてきた相対エントロピー関数と次のように結びつく: A, B を状態とし, 具体例 (i) の状況を考える．つまり,

$$\alpha(X,X) = \mathrm{Tr}(X^*AX), \qquad \beta(X,X) = \mathrm{Tr}(X^*XB)$$

とする．このとき前頁の定め方より, 二次補間形式 $\mathrm{QI}_t(\alpha,\beta)(X,X) = \mathrm{Tr}(X^*A^{1-t}XB^t)$ から相対エントロピー関数 $D(\alpha||\beta)$ が定まる．上で定義される相対エントロピーと相対エントロピー関数の間には Ⓓ次の対応がある:

$$D(\alpha||\beta)(I) = D(A||B). \tag{③}$$

相対エントロピー関数の同時凸性より $D(A||B)$ についても同時凸性が成り立つ．つまり,

$$D(sA_1 + (1-s)A_2||sB_1 + (1-s)B_2) \leq sD(A_1||B_1) + (1-s)D(A_2||B_2), \qquad s \in [0,1]$$

がすべての状態 A_1, A_2, B_1, B_2 に対して成り立つ．また, 相対エントロピー関数の Peierls–Bogoliubov の不等式から相対エントロピーの非負性

$$D(A||B) \geq 0, \qquad A,\ B \text{ は状態}$$

が従う．

(OMC Proxima Technology 杯 本選 第 4 問は次ページに続く.)

量子情報理論における相対エントロピーの重要な性質である**単調性** (または DPI (Data Processing Inequality)) についても, これまで考えてきた相対エントロピー関数 (および幾何平均と二次補間形式) の性質から導くことができる.

まずは必要な用語を説明する.

- 複素線形写像 $\Phi\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{M}_m(\mathbb{C})$ に対して, その随伴写像 $\Phi^*\colon \mathrm{M}_m(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ を, 任意の $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, $X \in \mathrm{M}_m(\mathbb{C})$ に対して $\mathrm{Tr}(\Phi(A)X) = \mathrm{Tr}(A\Phi^*(X))$ を満たすものと定める.
- Φ が**単位的** ($\Phi(I_n) = I_m$) であることと Φ^* が**トレースを保存する**こと ($\mathrm{Tr}(\Phi^*(X)) = \mathrm{Tr}(X)$) は同値である.
- Ⓔ複素線形写像 Φ が**正写像**であるとは, $A \geq 0$ ならば $\Phi(A) \geq 0$ が成立することであり, Φ が **Schwarz 写像**であるとは, 任意の A に対して $\Phi(A^*A) \geq \Phi(A)^*\Phi(A)$ が成立することである.

Ⓕ相対エントロピーの単調性とは次の性質である: 複素線形写像 $\Phi\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{M}_m(\mathbb{C})$ をトレースを保存する正写像であって, かつ Φ^* が Schwarz 写像であるものとする. このとき, 任意の状態 A, B に対して,

$$D(\Phi(A)||\Phi(B)) \leq D(A||B) \tag{4}$$

が成り立つ.

(OMC Proxima Technology 杯 本選 第 4 問は次ページに続く.)

設問

(1) 下線部Ⓐを示せ.

(2) 下線部Ⓑについて, 二次補間形式の性質 (a), (b) を示せ.

(3) 下線部Ⓒを示せ. すなわち, 任意の $x \in V$ に対して, 極限 $\lim_{t\to+0} -(\mathrm{QI}_t(\alpha,\beta)(x,x) - \alpha(x,x))/t$ が $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ の中に存在することを示せ.

(4) 任意の $x \in V$ に対して,

$$(\alpha,\beta) \in \mathcal{F}_+(V) \times \mathcal{F}_+(V) \longmapsto -\sqrt{\alpha\beta}(x,x) \in \mathbb{R}$$

という写像が α, β に関して同時凸であることを示すことにより, 相対エントロピー関数の同時凸性 (不等式①) を示せ.

(5) 相対エントロピー関数の Peierls–Bogoliubov の不等式 (不等式②) を示せ.

(6) 下線部Ⓓについて, 式③を示せ. ここで, A のスペクトル分解を $A = \sum_{\lambda\in\sigma(A)} \lambda P_\lambda$ としたとき, A^0 は $A^0 = \sum_{\lambda\in\sigma(A),\lambda\neq 0} P_\lambda$ であり, これは A のサポート射影となる.

(7) 下線部Ⓔについて, 複素線形写像 Φ が Schwarz 写像ならば, Φ は正写像であることを示せ. また, Φ が正写像ならば $\Phi(A^*) = \Phi(A)^*$ が成り立つことを示せ.

(8) 下線部Ⓕについて, 相対エントロピーの単調性 (不等式④) を示せ.

(OMC Proxima Technology 杯 本選 第 4 問は次ページに続く.)

[補足 1] A を対角行列, すなわち, $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ とする. 対角行列 A が状態である必要十分条件は $\lambda_i \geq 0$ かつ $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ である. このことは, $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ が (n 点集合上の) 古典的な確率分布である条件と同じである. 状態 A, B がともに対角行列である ($A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, $B = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$) とき, 相対エントロピー $D(A||B)$ は

$$D(A||B) = \mathrm{Tr}(A \log A - A \log B) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \log \lambda_i - \lambda_i \log \mu_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \log \frac{\lambda_i}{\mu_i}$$

である. ただし, $0 \log(0/\mu) = 0 \quad (\mu \geq 0)$, $\lambda \log(\lambda/0) = \infty \quad (\lambda > 0)$ とする. これは 2 つの確率分布 $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ と $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ の Kullback–Leibler ダイバージェンスである.

[補足 2] 量子情報理論における単調性はしばしば Φ が CPTP 写像 (Completely Positive and Trace-Preserving map) であることを仮定する. 複素線形写像 Φ が完全正写像 (completely positive map) であるとは, 任意の自然数 k について, $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ の元を成分とする $k \times k$ 行列

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} & \cdots & A_{kk} \end{bmatrix}, \qquad A_{ij} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$$

が半正定値行列ならば, $\mathrm{M}_m(\mathbb{C})$ の元を成分とする $k \times k$ 行列

$$\begin{bmatrix} \Phi(A_{11}) & \cdots & \Phi(A_{1k}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi(A_{k1}) & \cdots & \Phi(A_{kk}) \end{bmatrix}$$

も半正定値行列になる写像である. Φ が完全正写像である必要十分条件は Φ^* が完全正写像であることである.

A を任意の複素正方行列としたとき,

$$\begin{bmatrix} A^*A & A^* \\ A & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & I \\ O & O \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} A & I \\ O & O \end{bmatrix}$$

と書けることより, この行列は半正定値行列である. Φ が CPTP 写像であるとき, Φ^* は単位的な完全正写像であるので,

$$\begin{bmatrix} \Phi^*(A^*A) & \Phi^*(A^*) \\ \Phi^*(A) & \Phi^*(I) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi^*(A^*A) & (\Phi^*(A))^* \\ \Phi^*(A) & I \end{bmatrix}$$

も半正定値行列となる. ($(1, 2)$ 成分については, 設問 (7) で示したことより成り立つ.) このとき,

$$\begin{bmatrix} \Phi^*(A^*A) - (\Phi^*(A))^*\Phi^*(A) & O \\ O & I \end{bmatrix}$$
$$\left(= \begin{bmatrix} I & O \\ -\Phi^*(A) & I \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \Phi^*(A^*A) & (\Phi^*(A))^* \\ \Phi^*(A) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ -\Phi^*(A) & I \end{bmatrix} \right)$$

もまた半正定値となる. よって, $\Phi^*(A^*A) - (\Phi^*(A))^*\Phi^*(A) \geq 0$ であり, Φ^* は Schwarz 写像であることがわかる. したがって, 設問 (8) は「量子情報理論での相対エントロピーの単調性を Φ が CPTP 写像であるときより弱い仮定のもとで証明したもの」である.